ELEMENTA
GEOMETRIAE

Ad usum Collegii Imperialis Nobilium
RR. PP. Teatinorum

AB IMP. CAESARE

CAROLO VI.

Hispaniarum, ac Siciliae Rege

PANORMI INSTITUTI.

In quibus sex priores Elementorum Euclidis libri, una cum undecimo, & duodecimo explicantur, & animadversionibus in Philosophiae naturalis potissimum gratiam illustrantur.

Addito insuper initio libri v. Algebrae compendio

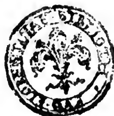
Opera, & studio

JO: BAPTISTAE NAEVII VICENTINI,
Clericorum Regularium Presbyteri.

AD ILLUSTRISS., ET EXCELLENTISS. VIRUM

FRANCISCUM BONANNUM

Catholicae, & Rupis Floridae Principem, &c. S. C. C. Majestatis Intimum Actualem Consiliarium Status, Aurei Velleris Equitem, atque Urbis Panormi tertium Prætorem.





ROMÆ, apud Salvionem MDCCXXXIV.

Superiorum auctoritate.

ILLUSTRISSIMO, ATQUE EXCELLENTISSIMO VIRO

FRANCISCO BONANNO

Catholicae, & Rupis Floridae Principi; Montis Albani, & Misilmerii Duci; Liminae Marchioni; Vicaris Comiti; Siculianae Magno Baroni; Cannicattini, Ravanusae, & Pritii Baroni; Mancinae, Fradalis, Vulturis, Casarum, Celestrae, Florestae, Zafferanae, Sancti Basilis, Castellanae, &c. Domino; Oneratorii Siculianensis Magistro Portulano; Hispaniarum Magnati; Aurei Velleris Equiti; Sacrae Caesareae, & Catholicae Majestatis Intimo Actuali Consiliario Status; Urbis Panormi tertium Praetori.

JO. BAPTISTA NAEVIUS C. R. S. P. D.

GEometriam in Sicilia natam esse, aut certe perpetuam in hac nobilissima Insula sedem jamdiu obtinuisse, ubi adsummum prope perfectionis culmen fuit evecta, adeo certum est, ut hac de caussa Mathematicarum scientiarum parens Sicilia jure optimo

mo haberi possit. Archimedes Syracusanus admirando, ac plane divino vir ingenio Mathematicas disciplinas eo perduxit, ut non ulterius progredi modo, sed ne pervenire quidem eo, atque ibi subsistere, ubi ille substitit, mortalibus concessum esse, plerique negaverint. Quid de Niceta item Syracusio dicam, qui ingeniosissimum illud Mundi systema adornavit, quod Copernicanum vulgo dicitur, quodque hujusce aetatis Astronomis tantopere probatur? Sed mihi instar omnium sit Euclides ipse, in quem scripta sunt Commentaria haec, quae Tibi, Princeps amplissime, exhibeo, quem Siculum fuisse, Geloum patria, nonnisi illi, qui anteactorum temporum monumenta ne summis quidem, ut ajunt, labiis attigere, negaverint; Euclides, inquam, cujus nomen in omnium ore versatur, ac tandiu versabitur, quoad ejus Elementorum libri, aureum sane opus, ac tot saeculorum judicio probatum, in eruditorum manibus versabuntur. Ex quibus conjicias licet, me non peregrinam aliquam facultatem, sed patriam, si quae

alia

alia est, & ut ita dicam, domesticam Tibi commendare, a quo literae, literatique homines, ii praesertim, qui de Sicilia optime meriti fuere, quae tua summa est animi magnitudo, & amor in Patriam incredibilis, opem, tutelam, & certissimum praesidium omni tempore nacti sunt; id quod sane tam honestum est, tam amplum, tam Viro Principe dignum, ut vel hoc solo Te praeclarissimo genere, atque ob innumeros doctrina, prudentia, fortitudine praestantes Viros nobilissimo, natum esse, satis probari possit; quas animi dotes in Te uno suspiciunt, atque admirantur, non cives tui modo, atque ii, quorum familiaritate uteris, sed exteri etiam, ac illi, quibus nomine solo notus es. Tuam quidem in rebus arduis, asperisque constantiam, sapientiam, consilium sensit regia haec Urbs, quam gravissimis, difficillimisque temporibus sapientissime administrasti, quamque nunc tertium Praetor sanctissime moderaris. Singularem item literarum, atque optimarum artium amorem testatur hoc ipsum Imperiale Collegium,

cujus

cujus institutionem toties exoptatam, & communi totius Siciliae plausu tandem aliquando perfectam, ope, & opera adjuvisti, dignus propterea, qui Sexvir eidem Collegio moderando auctoritate Caesaris constituereris, quemque ob maxima in Se, in Regnum, atque in Patriam merita singularibus Aurei Velleris insignibus idem Caesar decoraret. Opusculum igitur hoc, quod ad usum ejusdem Imperialis Collegii nunc primum in lucem prodit, jure Tibi deberi quis non videat? Illud tamen ita in tutelam accipias velim, ut non Opus ipsum, quod pluribus fortasse, quam vellem, mendis obnoxium est, sed offerentis animum respicias. Etenim ob eximia Tui in me, Teatinumque Ordinem merita, praeclare mecum actum putabo, si tenuem hanc grati animi significationem, quae tua humanitas erit, grate, & amanter Te accepisse cognovero. Vale.

Panormi Idib. Decemb. Anni MDCCXXXIII.

Quum

QUum Opus, cui titulus est: *Elementa Geometriae ad usum Collegii Imperialis Nobilium*, &c. ab Johanne Baptista Naevio nostræ Congregationis Presbytero, jussu Reverendissimi Patris D. Josephi Mariae Brembati ejusdem Congregationis Praepositi Generalis, serio, attenteque perlegerimus, nihilque in eo occurrerit, quo minus publica luce dignum esse videatur; idem typis mandari posse censemus, atque pronuntiamus.

Idibus Sextil. Anno aerae vulgaris 1733.

D. Jo: Hieronymus Gravina C. R. Philosophiae, & S. Theologiae Professor.

D. Josephus Augustinus Castelli C. R. Philosophiae Lector, & S. Theologiae Professor.

D. JOSEPHUS MARIA BREMBATUS

Congregationis Clericorum Regularium Praepositus Generalis.

HOc Opus inscriptum: *Elementa Geometriae*, &c. a R.P. D. Johanne Baptista Naevio nostrae Congregationis Presbytero compositum, & juxta testimonium Patrum, quibus id commisimus, approbatum, ut typis mandetur, quo ad nos spectat, facultatem concedimus. In quorum fidem praesentes literas manu propria subscripsimus, & solito nostro sigillo firmavimus. Romae nonis Septembr. 1733.

D. Josephus Maria Brembatus Praepositus Generalis Clericorum Regularium.

Loco ✠ sigilli.

D. Dominicus Maria Protus C. R. Secretarius.

[illegible]

D. Jos. Hieronymus [illegible] C. R. [illegible] S. Theol. Professor.

D. Josephus [illegible] Cajetanus C. R. [illegible] Lector, [illegible]

D. JOSEPHUS MARIA [illegible]

Congregationis Clericorum Regularium Praepositus Generalis.

Cum Opus inscriptum : [illegible] a R. P. D. Johanne [illegible] Nostrae Congregationis Presbytero [illegible] juxta testimonium Patrum, quibus illud [illegible] approbatum, ut typis mandetur [illegible] facultatem concedimus. In quorum fidem [illegible] his litteris manu nostra subscriptis, & nostro sigillo firmatis. Romae [illegible] 1733.

D. Josephus Maria [illegible] Praepositus Generalis Clericorum Regularium.

Loco ✠ Sigilli.

D. [illegible] C. R. [illegible] a Secretis.

PRÆFATIO

QUÆ Geometriæ Elementa edere constituenti dicenda esse videntur, nimirum, quæ sit eorum utilitas, quæ operis ratio, quoniam illa quidem omnibus, qui in hoc studio versantur, nota esse arbitror, breviter perstringam. Verum antequam de re, pauca de me; neque enim mediocriter moveor illorum auctoritate, qui quum ad rem adeo vulgatam, totque summorum virorum vestigiis tritam, nihil novi jam afferri posse putent, qui in nova commentaria adornanda incumbunt, eos actum agere, ut ajunt, profecto arbitrantur. Quasi vero in reliquis disciplinis omnibus passim idipsum fieri quisque non videat, in quibus novi semper scriptores, vel rarius quidpiam, aut exquisitius allaturos se, vel certe eos, qui se præcesserunt, aut dicendi perspicuitate, aut aptiore rerum tractandarum ordine, superaturos credentes, novos quotidie libros emittere non cessent. Quod si in Philosophia, in Theologia, & reliquis disciplinis omnibus id facere licitum est, cur non etiam in Geometria hoc ipsum facere licebit, quam quotidie, ex quo impensius hac nostra ætate coli cœpta est, magis, magisque in dies perfici conspicimus? At ne quis sola me scribendi libidine, ut non raro contingit, non ve-

ro ratione, aut potius necessitate, impulsum fuisse suspicetur, aperte fateor, me nunquam antehac, de hoc negotio suscipiendo cogitasse; quippe cui persuasissimum esset, dicam enim ut res est, nihil a me afferri posse, quod non in aliorum libris multo accuratius, atque subtilius fuerit explicatum. In qua sane animi sententia etiam nunc essem, si Geometriæ studium mihi ipse sumere tantummodo debuissem ad mei utilitatem, & ad vitæ consuetudinem, non vero ad aliorum eruditionem adhibere. Verum ubi ad munus Philosophiæ nobilissimis hujus Imperialis Collegii Adolescentibus explicandæ fui vocatus, quo in studio sine Geometria nihil proficí posse constat; diu, multumque cogitare cœpi, quo potissimum Auctore uterer, in quo illa omnia essent, quæ naturalem Philosophiam addiscenti scitu necessaria sunt. Etenim ea, quæ Euclides in suis Elementorum libris, ejusque interpretes scripta reliquerunt, nec sola sufficere, nec omnia necessaria esse intelligebam; proindeque, quum plura iis addi, tum longe plura etiam detrahi oportere ab eo, qui illa omnia complecti velit. quæ optime instructum, paratumque adolescentem ad scientiæ naturalis studium efficere possent. Id autem nullus, qui Euclidis libros latina lingua sunt interpretati, quod sciam, adhuc præstitit; immo quum ab illius vestigiis discedere plerique omnes religioni ducerent, non modo nihil in iis immutare ausi

sunt,

ſtint; ſed inſuper verbum de verbo reddentes, *quod facere interpretes indiſerti ſolent*, inquit Tullius (*Tuſc.* 3.) obſcuram adeo, & implicitam facultatem hanc effecerunt, ut interpres ipſe interprete egere nonnunquam videatur. Alii, contra, illa ipſa, quæ Euclides explicavit, theoremata alia methodo ordinari poſſe rati; ſervatum ab eo ordinem omnem inverterunt, novumque excogitarunt: qua in re tametſi eos reprehendere non audeo, laudare tamen non poſſum, quum non ſemel occurrat veterum Geometrarum, qui poſt Euclidem ſcripſerunt, libros volventibus Elementorum theoremata eo ordine citata reperire, quo ab Euclide digeſta ſunt, quem ordinem qui ignorat, niſi in Geometria verſatiſſimus ſit, inter legendum hæreat neceſſe eſt. Non defuerunt etiam, qui hæc incommoda ut evitarent, ita eadem Elementa explicanda ſuſceperint, ut & interpretum methodum nimis quidem prolixam effugerent, & ſimul ab ſemita, quam Euclides tenuit, minime diſcederent; ſed ii, dum breves eſſe laborarunt, in idem, ac interpretes ipſi, obſcuritatis vitium inciderunt: demonſtrationes namque, quas, ut tyronum captui accommodentur, faciles, & planas eſſe oportet, breves adeo, & conciſas poſuerunt, ut indicare eas potius, quam explicare, videantur. Hæc ſæpe quum perpenderem, de negotio hoc ſuſcipiendo cogitare cœpi; utque adoleſcentum ætati, & ingenio, quæ ſcribebam,

apta

apta essent, quod primum in præceptoris officio esse debet, simulque disciplinam, jucundissimam quidem, sed nonnihil difficilem, tyronibus præsertim, facilem, atque expeditam redderem, in propositionibus explicandis eam sequutus sum rationem, qua Ozanamus Gallus mathematicus nobilissimus usus est, ut scilicet, quidquid ad Theoremata demonstranda facto opus est, seorsum ab ipsa demonstratione ponerem, & *Præparationem* inscriberem: ne, dum tyrones demonstrationi percipiendæ intenti sunt, lineis, circulis, vel aliis hujusmodi, quæ identidem occurrunt, describendis a veritatis contemplatione avocentur, quod sane citra confusionem, atque adeo sine periculo argumenti nexum, ordinemque turbandi, fieri nequit. Ad brevitatem quod attinet, sex priores tantum Euclidis libros una cum XI, & XII explicandos suscepi, in quibus etiam non exiguum propositionum numerum, quæ minus utiles videbantur, præterii; id quod in caussa est, quamobrem alias plerumque ab iis, quas Euclides posuit, demonstrationes adhibuerim ab accuratissimis Geometris petitas, & præsertim ab Ozanamo, quem potissimum auctorem in propositionum delectu sequutus sum. Quoniam tamen quæ in Elementorum libris continentur, ut supra dixi, sola minime sufficiunt ad eorum intelligentiam, quæ in Physicis agitari solent, hinc nonnulla adjeci, quæ disperse in aliis

Ma-

Mathematicorum libris apposita reperivi. Quinti igitur libri definitionibus aliqua de *Incommensurabilibus*, deque *Logarithmis* inserui: Item ad calcem libri sexti de *Trigonometria*, deque construtione tabularum *sinuum*, *tangentium*, & *secantium* breviter egi. Tabulas ipsas non posui, sed viam, ac rationem, qua illas in libris, in quibus exstant, quivis consulere possit, aperui. In fine denique libri XII. brevem *Conicorum* tractationem institui, in qua quum *paraboles*, *ellipseos*, *&* *hyperboles* naturam clare, & dilucide explicare studui, tum quomodo eæ construantur exposui. Atque hæc quidem omnia in gratiam eorum, quæ de motibus compositis in *Ballistica*, de corporum aequilibrio in *Statica*, de planetarum, astrorumque phænomenis in *Astronomia*, de variis conspicillorum, & speculorum generibus, eorumdemque usu in *Dioptrica*, & *Catoptrica* pertractantur. Iis propositionibus præterea, quæ ad rem aliquam explicandam in Philosophia assumi solent, adnotationes passim apposui, in quibus, quem usum habere possint, declaravi. Ex quo conjicere licet, non parvi laboris opus a me fuisse susceptum, quod tamen in lucem proferre nunquam in animo habui, quippe qui ad mei duntaxat, ac discipulorum meorum commodum eo uti decreveram. Verum ubi sensi, quam molestum esset nobilissimis Adolescentibus, quorum labor in transcribendis Philoso-

phiæ

phiæ scriptis erat non levis, si in Geometria etiam describenda augeretur, ut eos parte oneris levarem, simulque partem temporis, quod scholasticis exercitationibus destinatum est, ad utiliora transferrem, quæ ipsis scribenda forent, ut typis mandarem, adduci cœpi. Nec defuit amicorum consilium, eorum præsertim, quorum auctoritas apud me plurimum valet, qui me adhuc cunctantem, & quasi verecundantem, atque de exitu diffidentem, ut quamprimum id exequerer, compulerunt, rem studiosæ juventuti utilem me facturum pollicentes, si facultatem omnium, quæ in hominum more, studioque versantur, utilissimam, illa ipsa, qua a me privatim in schola explicata est, methodo, publici juris facerem. Et ut vere dicam, si minus in eo, quod ad me attinet, in eo certe, quod ad rem ipsam spectat, aliquid caussæ est, quamobrem ipsis assentiar. Et sane si omnium laudatarum artium procreatricem, & quasi parentem Philosophiam esse veteres perhibuerunt, quid de Mathesi dicendum erit, in qua vis ejus omnis, præsidium, & munimentum, saltem in ea parte, quæ ad naturam pertinet, positum est? Constat inter omnes, sine Geometria neminem viam sibi ad naturalem scientiam parare posse, non ad eam modo, quæ novissimis hisce temporibus restituta est, sed ne ad veterem quidem; quod nonnisi illi negabunt, qui veterum Philosophorum libros nunquam præ manibus
ha-

habuerunt, nec quidquam aliud de veteri Philosophia, præter Auctoris, vel Sectæ appellationem hauserunt. Etenim, ut de Peripateticis loquar, in eorum quidem scriptis, quum omnis sermo elegans, atque insignis ubique orationis ornatus, tum plurimus mathematicarum literarum usus invenitur. *Natura ab iis sic investigata est*,(inquit Tullius lib. 5. de finibus.)*ut nulla pars Cœlo, Mari, Terra prætermissa sit; quin etiam quum de rerum initiis, omnique mundo loquuti essent., ut multa, non modo probabili argumentatione, sed etiam necessaria mathematicorum ratione concluderent, maximam materiam ex rebus per se investigatis ad rerum occultarum cognitionem attulerunt. Persequutus est Aristoteles animantium omnium ortus, victus, figuras; Theophrastus autem stirpium naturas, omniumque fere rerum, quæ e terra gignerentur, caussas, atque rationes*. Quæ omnia quum sine Geometria nullo modo tractari, proindeque ne intelligi quidem possint, quid mirum, si in iis, quæ vulgo circumferuntur, Aristotelis commentariis nihil fere, præter nominis insigne, vel ad summum unam, aut alteram definitionem per manus traditam, non e fontibus haustam, reperiatur? Verum ut hæc, quæ longiore fortasse egerent oratione, quam tamen non est hujus loci pertexere, missa faciamus, id unum monuerim, nullam adhuc extare disciplinam,

quæ ad ingenii capacitatem augendam, mentemque acuendam, & in veritatis investigatione adjuvandam magis conducat, quam Mathematica. Per ipsam siquidem veris, solidisque argumentis, necessariisque ab evidentia ductis ratiocinationibus ita paullatim assuescit animus, ut ab inanibus ratiunculis, quibus infirmæ, tardæque mentes sæpe moveri solent, minime abduci se sinat, tantumque a levitate, & temeritate absit, quantum evidentia, & perspicuitas ab errore, & levitate disjungitur. Sed jam ad rem ipsam veniamus.



PRÆNOTANDA.

Omnis Matheseos pertractatio circa quantitatem versatur; est autem quantitas, id quod respondetur, quæstione facta, quanta sit res; *eaque est duplicis generis, alia nimirum, quæ* continua, *alia vero, quæ* discreta *nuncupatur. Primi generis quantitas, quæ* extensio *etiam dici solet, ea est, quæ partes habet aliquo communi nexu inter se copulatas; cujusmodi est v. g. lignum bipalmare; altera vero, quæ partes habet invicem disjunctas, ut numeri, eaque idcirco* numerica *etiam vocatur.*

Ea Mathematicæ pars, quæ de quantitate numerica agit, dicitur Arithmetica; *quæ vero circa continuum occupatur*, Geometria. *De hac Mathesis parte hic agendum est, quamquam de Arithmetica etiam, ubi necesse fuerit, nonnihil dicemus; ambæ siquidem ita inter se connexæ sunt, ut una ab altera identidem auxilium petat, sesequè vicissim illustrent.*

Geometria igitur est scientia, quæ per varias propositiones, quarum altera ab alia pendet, corporum extensionem, longitudinem nimirum, latitudinem, & profunditatem, modosque omnes, quibus eadem affici, aut determinari potest, speculatur; qua in re nullam habet rationem de reliquis corporis proprietatibus, quæ physicæ *dicuntur, cujusmodi esset*, durities, mollities, gravitas, levitas, &c.

Principia, quibus propositiones geometricæ nituntur, tria sunt; scilicet, Definitiones, Postulata, & Axiomata.

Definitio *est rei cujuspiam, vel nominis explicatio; ut quum dicimus*: Triangulum esse figuram tribus lineis, vel tribus angulis, contentam; *qua in definitione quum trianguli nomen, tum res ipsa declaratur.*

 Po-

Postulatum *id dicitur omne, quod fieri mini me repugnat, quodque aliunde nequit demonstrari*; *ut*, ab uno puncto ad aliud punctum rectam lineam ducere. *Id autem nulla ratione demonstrare potest Geometria, præterquam experientia.*

Axioma *est sententia per se manifesta*; *ut*, totum est sui parte majus.

Propositiones duplicis sunt generis; aliæ enim aliquid tum faciendum, tum demonstrandum proponunt, vocanturque Problemata; *aliæ vero quidpiam solummodo demonstrandum postulant, eæque* Theoremata *nominantur. Præter has, aliæ sunt propositiones, quæ idcirco assumuntur, ut per eas Theorema, vel Problema aliquod demonstretur, atque hæ vocantur* Lemmata. *Aliæ item sunt, quæ ex ante demonstratis consequuntur, eæque dicuntur* Corollaria.

Conversæ *propositiones sunt, quarum una ex alia deducitur, & vicissim.*

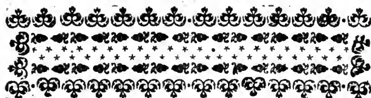
MONITUM.

Figuras, quæ ad propositionum intelligentiam faciunt, ære excusas exhibent tabulæ in fine operis collocatæ. Hortarer tamen Adolescentes Geometriæ studiosos, ut easdem ipsi per se in charta, vel in tabula exararent; id enim magno ipsis adjumento ad propositionum intelligentiam futurum arbitror.

Hæc nota + *significat plus; hæc alia* — *minus; hæc denique* = *significat æqualitatem.*



LI-



LIBER PRIMUS.

IN hoc primo libro agit Euclides de lineis, angulis, & triangulis, ac de reliquis figuris planis rectilineis. Antequam tamen propositiones explicare incipiat, eorum omnium, de quibus in hoc libro agendum est, definitiones ponit; quod etiam in reliquis libris observatur.

DEFINITIONES.

I. PUnctum *Mathematicum* est id, quod partes non habet; seu quod tamquam individuum quiddam consideratur.

II. *Linea* est extensio in longum latitudinis expers. *Hæc autem, non secus ac punctum, nonnisi mente concipi potest.*

III. Lineæ *extrema* sunt puncta, posito quod finita sit.

IV. *Linea recta* est, quæ punctis constat æqualiter positis inter extrema. *Igitur si cogitemus punctum ita in directum moveri, ut in neutram partem deflectat, tum lineam rectam describi intelligemus.*

V. *Superficies* est extensio in longum, & latum duntaxat. *Hinc si cogitemus lineam in transversum moveri, ejus motu superficiem designari apparebit.*

VI. Superficiei *extrema* sunt lineæ, posito quod finita sit.

VII.

VII. *Superficies plana*, seu *planum*, est cujus lineæ omnes æqualiter sunt collocatæ, ita ut neutra magis attollatur, vel deprimatur, quam alia.

VIII. *Angulus planus* est superficies plana a duabus lineis sese tangentibus, non in directum jacentibus, contenta; *ut ABC (fig. 1. tab. 1.)*

IX. Si lineæ angulum continentes rectæ fuerint, angulus *rectilineus* vocabitur; *ut ABC (fig. 1. tab. 1.) Quare si ambæ curvæ sint*, curvilineus, *si altera tantum curva*, mixtus *dicendus erit*.

X. Ex angulis, alii sunt *recti*, alii *obliqui*. *Rectus angulus* est, quum linea recta super aliam rectam ita consistit, ut angulos utrobique æquales faciat: tunc enim ambo anguli *recti* vocantur, & linea insistens *perpendicularis* nominatur. *Sic linea AB (fig. 2. tab. 1.) perpendicularis est lineæ CD, anguli vero ABC, & ABD, recti. Advertendum est angulum aliquando tribus literis, aliquando unica litera notari solere; quando tribus literis notatur, litera media ea est, quæ angulum indicat.*

XI. Ex obliquis angulis alii sunt *obtusi*, alii *acuti*. *Obtusus angulus* dicitur, qui major est recto angulo; *ut EFG (fig. 3. tab. 1.)*

XII. *Acutus angulus* dicitur, qui minor est recto, *ut ABC (fig. 1. tab. 1.)*

XIII. *Terminus* est cujusvis rei finis, seu extremum.

XIV. *Figura* est spatium uno, vel pluribus terminis comprehensum. *Hinc angulus simplex, ut ABC (fig. 1. tab. 1.) non est figura, quum spatium non ubique clausum contineat.*

XV. Si lineæ rectæ extremum in aliquo puncto fixum statuatur in plano, alterum vero extremum circa idem punctum in eodem plano tandiu circumducatur, donec ad locum, unde moveri cœpit, redeat; figura ab extremo lineæ mobili descripta *circulus* erit; spa-

ſpatii vero ab ea comprehenſi extremum *peripheria*, ſive *circumferentia* appellabitur. *Itaque ſi cogitemus extremum A lineę AD (fig. 4. tab. 1.) cujus alterum extremum fixum ſit in D, circa idem punctum D, moveri per puncta C, & B, donec in A revertatur, figura ABC circulus erit.*

XVI. Punctum illud fixum, circa quod linea circulum deſcribens movetur, dicitur *centrum* circuli; *ut D (fig. 4. tab. 1.) a qua lineæ ad circumferentiam ABC ductæ ut DB, DC &c. radii vocantur.*

XVII. *Diameter circuli* dicitur linea recta per ejus centrum tranſiens, & circulum bifariam, ſive in duas partes æquales, dividens; *ut AB (fig. 4. tab. 1.)*

XVIII. *Semicirculus* eſt figura contenta ſub diametro, & dimidia circuli circumferentia; *ut ABC (fig. 4. tab. 1.)*

XIX. *Portio circuli*, ſive *ſegmentum circuli* eſt figura ſub recta linea, & circumferentiæ parte, quæ ſit, vel major, vel minor, quam ſemicirculus, comprehenſi, *ut ABC, vel ADC (fig. 5. tab. 1.) ABC dicitur* portio circuli major, *ſive* ſegmentum majus, *ADC autem* ſegmentum minus.

XX. *Rectilinea figura* dicitur, quæ rectis lineis terminatur.

XXI. Rectilinearum figurarum prima eſt *trilatera*, quæ tribus lineis continetur; eaque vocatur etiam *triangulum*; *ut ABC (fig. 6. vel 7. tab. 1.)*

XXII. *Quadrilateræ figuræ* ſunt, quæ quatuor lineis conſtant; *ut ABDC (fig. 8. tab. 1.)*

XXIII. *Multilateræ figuræ* ſunt, quæ ſub pluribus, quam quatuor rectis lineis continentur. *Hinc quæ ſub quinque continetur, dicitur* Pentagonum, *quæ ſub ſex*, exagonum, *quæ vero ſub pluribus*, Polygonum.

XXIV. Trilaterarum porro figurarum *triangulum æquilaterum* dicitur ea, quæ tribus lineis æqualibus conſtat; *ut ABC (fig. 14. tab. 1.)*

XXV.

XXV. *Isosceles*, sive *æquicrure triangulum* vocatur, quod duo habet latera æqualia; *ut ABC* (*fig.* 2?. *tab.* 1.)

XXVI. *Scalenum* vero est, quod sub tribus inæqualibus lateribus continetur; *ut ABC* (*fig.* 6. *tab.* 1.)

XXVII. *Triangulum rectangulum* dicitur, quod rectum angulum habet, *ut ABC* (*fig.* 6. *tab.* 1.)

XXVIII. *Triangulum ambligonium*, sive *obtusangulum*, est, quod angulum habet obtusum; *ut ABC* (*fig.* 7. *tab.* 1.)

XXIX. *Triangulum oxigonium*, sive *acutiangulum* dicitur, cujus anguli omnes sunt acuti, seu recto minores; *ut ABC* (*fig.* 14. *tab.* 1.)

XXX. Quadrilaterarum autem figurarum *quadratum* dicitur, quæ omnia latera æqualia habet, & angulos item æquales habet; *ut ABDC* (*fig.* 8. *tab.* 1.)

XXXI. *Altera parte longior* dicitur figura quadrilatera, quæ angulos quidem omnes æquales habet, latera vero non item; *ut EFHG* (*fig.* 9. *tab.* 1.) *Hæc autem parallelogrammum rectangulum etiam dicitur.*

XXXII. *Rhombus* est figura item quadrilatera, quæ latera quidem omnia æqualia habet, angulos vero oppositos tantum æquales; *ut LMON* (*fig.* 10. *tab.* 1.)

XXXIII. *Rhomboides* est, quæ neque est æquilatera, neque æquiangula; at tum latera, tum angulos ex opposito habet æquales; *ut PQSR.* (*fig.* 11. *tab.* 1.) *Advertendum est hic figuras omnes quadrilateras husque explicatas parallelogramma vocari solere.*

XXXIV. Reliquæ figuræ quadrilateræ *Trapezia* appellantur; *ut T, & V,* (*fig.* 12. & 13. *tab.* 1.)

XXXV. *Parallelæ* sunt rectæ lineæ, quæ in eodem existentes plano ex æquo ubique inter se distant, & si producantur nunquam sibi occurrunt; *ut AB, & CD* (*fig.* 36. *tab.* 1.) *eæ enim si ulterius producantur in directum, nunquam sibi occurrent.*

PO-

POSTULATA.

I. AB omni puncto in omne punctum rectam lineam ducere.

II. Rectam lineam finitam in continuum, rectumque producere.

III. Omni centro, & intervallo circulum describere.

AXIOMATA.

I. QUæ eidem sunt æqualia, inter se sunt æqualia.

II. Si æqualibus addas æqualia, tota erunt æqualia.

III. Si ab æqualibus demas æqualia, quæ remanent sunt æqualia.

IV. Si inæqualibus adjiciantur æqualia, tota erunt inæqualia.

V. Si ab inæqualibus æqualia auferantur, reliqua inæqualia erunt.

VI. Quæ ejusdem sunt dupla, vel tripla, &c. inter se sunt æqualia.

VII. Quæ ejusdem sunt dimidia, inter se sunt æqualia.

VIII. Quæ sibi mutuo congruunt, ita ut neutrum alterum excedat, inter se sunt æqualia

IX. Totum est sui parte majus.

X. Omnes anguli recti sunt inter se æquales. *Id potest erui ex definitionibus* 10, 11, *&* 12 *Notandum est autem angulorum magnitudinem, non ex longioribus, aut brevioribus, quibus continentur, lineis, sed ex majori earundem inclinatione desumi; quod clarius innotescet in propositione* 21 *hujus libri*.

XI. Omnes perpendiculares lineę intra duas parallelas ductæ sunt æquales. *vide def.* 35.

XII. Duæ rectæ lineæ spatium comprehendere, seu claudere, nequeunt.

XIII. Omnes rectæ lineæ a centro ad circuli circumferentiam ductæ sunt æquales. *Siquidem linea, quæ circulum describit, dum circa alterum sui extremum fixum tensa movetur, est semper æqualis sibi ipsi; vide def. 15.*

Reliqua axiomata, quæ poni solent, vel in tredecim allatis comprehenduntur; vel ita clara sunt, ut ridiculum esset ea referre; vel denique demonstrari possunt, proindeque inter Theoremata sunt recensenda.

PROPOSITIO I.

PROBLEMA I.

Super datam rectam lineam terminatam triangulum æquilaterum constituere.

Sit data recta linea AB (*fig. 14. tab. 1.*) super qua describendum est triangulum habens omnia latera æqualia. Aperiatur circinus secundum longitudinem AB, & a puncto quidem A, tamquam a centro, intervallo autem AB describatur arcus circuli BCD (*per post. 3.*) Item a puncto B, intervallo BA, describatur arcus alterius circuli ACE; denique a puncto C, in quo illi arcus sese intersecant, ducatur ad punctum A linea recta CA, & ad punctum B recta linea CB (*per post. 1.*) quę quidem eidem lineæ AB erunt æquales.

DEMONSTRATIO.

Quoniam duæ rectæ AB, & AC sunt duo radii circuli BCD (*per def. 16.*) sunt æquales (*per axioma 13.*) Atqui linea BC est æqualis item lineę AB, ob eandem rationem; Ergo tres lineæ AB, AC, BC sunt æquales (*per axi. 1.*) proindeque triangulum ABC est æqui-

æquilaterum (*per def.* 24.) *quod tum facere, tum demonstrare oportebat.*

PROPOSITIO II.

PROBLEMA II.

A Dato puncto rectam lineam ducere æqualem alteri rectæ lineæ datę.

Ut a dato puncto C (*fig.* 15. *tab.* 1.) ducatur recta æqualis datæ lineæ AB, jungatur recta CA (*per post.* 1.) & super ea describatur triangulum æquilaterum ACD (*per propositionem* 1.) Tum a puncto A, intervallo vero AB, ducatur arcus circuli AFG; productoque latere DA in F (*per post.* 2.) a puncto D, intervallo vero DF, describatur alter arcus circuli EFB. *Denique producta linea* DC in E (*per post.* 2.) dico lineam CE æqualem esse lineæ datæ AB.

DEMONSTRATIO.

Si a duabus lineis DE, & DF, quæ æquales sunt (*per axi.* 13.) auferantur duæ partes DC, & DA, item æquales (*per constructionem*) quæ remanebunt rectæ CE, & AF, erunt æquales (*per axi.* 2.) Atqui recta AF æqualis est rectæ AB datæ, (*per axi.* 13.) ergo recta CE erit pariter æqualis (*per axi.* 1.) lineæ datæ AB; *quod faciendum, & demonstrandum susceperamus.*



PROPOSITIO III.

PROBLEMA III.

DAtis duabus rectis lineis inæqualibus, a majori linea partem abſcindere majori æqualem.

Sint datæ binæ rectæ lineæ inæquales, quarum major AB, (*fig.* 16. *tab.* 1.) minor vero CD. Ut a majori AB abſcindatur portio æqualis rectæ CD, ducatur a puncto A (*per* 2.) recta AE æqualis ipſi CD; deinde ab eodem puncto A, intervallo vero AE, deſcribatur arcus circuli EFG, qui dabit rectam AF æqualem rectæ CD datæ.

DEMONSTRATIO.

Linea AF æqualis eſt rectæ AE (*per ax.* 13.) atqui recta AE item æqualis eſt (*per conſtr.*) rectæ CD datæ; ergo recta AF æqualis erit eidem CD datæ (*per ax.* 1.) *quod facere, & demonſtrare oportebat*.

PROPOSITIO IV.

THEOREMA I.

SI duo triangula duo latera duobus lateribus æqualia habuerit, & anguli intra latera æqualia comprehenſi ſint æquales, baſes etiam, & anguli ad baſim poſiti, quibus æqualia latera ſubtenduntur, erunt æquales.

Videlicet ſi latus AB trianguli ABC (*fig.* 17. *tab.* 1.) æquale ſit lateri DE trianguli DEF (*fig.* 18.) tum la-

latus AC lateri DF, & angulus comprehensus A æqualis angulo D item comprehenso, dico basim BC æqualem pariter esse basi EF, tum angulum B angulo E, & angulum C angulo F.

DEMONSTRATIO.

Statuatur per cogitationem triangulum EFD super triangulum ABC; quo facto, punctum D conveniet cum puncto A, punctum E cum puncto B, & punctum F cum puncto C (*per axi. 8.*) ob angulum D æqualem angulo A, obque latera DE, DF æqualia duobus lateribus AB, AC, alterum alteri (*ex hypothesi*) Quocirca basis etiam EF conveniet cum basi BC. Etenim si basis EF caderet, vel citra basim BC in puncto H, vel ultra in puncto G, duæ rectæ lineæ spatium comprehenderent, quod est absurdum (*per axioma 12.*) *Igitur* basis EF æqualis erit basi BC, angulus E angulo B, & angulus F angulo C (*per ax. 8.*) *quod ostendendum susceperamus*.

PROPOSITIO V.

THEOREMA II.

In triangulo isoscele anguli ad basim positi sunt inter se æquales; & si duo latera æqualia ejusdem producantur, anguli etiam, qui fient sub basi, erunt æquales.

Dico 1. si in triangulo isoscele ABC (*fig.19.tab.1.*) duo latera AB, AC æqualia producantur, angulos DBC, & ECB, qui sub basi BC sunt constituti, esse inter se æquales.

PRÆPARATIO.

Producatur (*per post.* 1.) latus AB in D, tum latus AC in E, fiatque recta AE æqualis rectæ AD (*per* 2.) denique jungantur duæ rectæ BE, & CD.

DEMONSTRATIO.

Duo triangula ABE, & ACD sunt inter se æqualia (*per* 4.) habent enim duo latera duobus lateribus æqualia; latus scilicet AB trianguli ABE, æquale est lateri AC trianguli ACD, (*ex hypoth.*) & latus AD æquale est lateri AE (*per constr.*) & angulus A inter ea comprehensus est utrique triangulo communis. Ergo basis BE æqualis erit basi CD, tum angulus ABE æqualis angulo ACD, & angulus D æqualis angulo E.

Duo insuper triangula CBD, & BCE sunt item æqualia (*per* 4.) latus enim BD æquale est lateri CE (*per constr.*) latus CD lateri BE, ut modo ostensum est, & angulus comprehensus D angulo E item comprehenso. Ergo etiam angulus DBC æqualis erit angulo BCE; *quod primo loco erat ostendendum*.

Dico 2. angulos ABC, & ACB, qui super basi BC sunt constituti, esse inter se æquales.

DEMONSTRATIO.

Quoniam duo anguli ACD, & ABE sunt æquales per superiorem demonstrationem; si ab iis auferantur duo anguli CBE, BCD, qui sunt item æquales, ob duo triangula BDC, CEB, quæ modo ostensa sunt æqualia; qui supererunt anguli ABC, ACB erunt æquales (*per ax.* 3.) *quod demonstrandum supererat.*

PRO-

PROPOSITIO VI.

THEOREMA III.

SI in triangulo duo anguli ad basim sint æquales, latera etiam hisce duobus angulis opposita æqualia erunt.

Dico, si duo anguli CAB, CBA trianguli ABC (*fig.* 20. *tab.* 1.) sint æquales, duo latera etiam AC, BC esse æqualia.

PREPARATIO.

In hypothesi quod alterum latus, puta BC, majus sit, abscindatur ab eo (*per* 3.) pars BD æqualis lateri AC; jungaturque recta AD, quæ necessario cadet intra triangulum.

DEMONSTRATIO.

Quoniam duo triangula ABC, ABD habent duo latera AB, BD æqualia duobus lateribus AB, AC (*per constr.*) & angulus comprehensus B æqualis est angulo comprehenso BAC (*ex hypoth.*) sunt inter se æqualia (*per* 4.) proinde angulus BAD æqualis erit angulo B, atque adeo angulo BAC (*per axi.* 1.) Atqui hoc absurdum est (*per axi.* 9.) Ergo linea AD debet cadere super lineam AC, & punctum D in punctum C, quo fiet ut latus BC æquale sit lateri AC; *quod demonstrandum susceperamus.*

CO-

COROLLARIUM.

Ex duabus hisce propositionibus sequitur, omne triangulum æquilaterum esse etiam æquiangulum, & vicissim. Anguli enim bini, & bini, non secus ac latera, semper inveniuntur æquales.

Quum septima Euclidis Propositio ad octavam demonstrandam duntaxat inserviat, quæ quidem sine ea optime ostendi potest, ne quid minus utile hic ponamus, omittendam censuimus.

PROPOSITIO VIII.

THEOREMA V.

SI duo triangula tria latera tribus lateribus æqualia habuerint, alterum alteri, ea erunt omnino æqualia.

Dico, si duo triangula ABC, ACD (*fig.* 21. *tab.* 1.) habeant singula latera singulis lateribus æqualia, ea esse omnino æqualia.

PREPARATIO.

Quoniam duo triangula proposita bases æquales habent (*ex hypoth.*) si bases statuantur contiguæ, eæ sibi mutuo congruent (*per axi.* 8.) erit igitur AB latus commune utriusque trianguli; hoc posito jungatur recta CD, quæ cadat intra duo triangula.

DEMONSTATIO.

Quoniam duo latera AC, AD sunt æqualia; non secus ac duo BC, BD (*ex hyp.*) angulus ACD æqualis erit angulo ADC; & insuper angulus BCD æqua-

æqualis erit angulo BDC (*per* 5.) proindeque totus angulus ACB æqualis erit (*per axi.* 2.) toti angulo ADB: atque adeo (*per* 4.) totum triangulum ABD æquale erit toti triangulo ABC; *quod operæpretium erat demonstrare.*

PROPOSITIO IX.

PROBLEMA IV.

ANgulum rectilineum bifariam dividere.

Ut dividatur bifariam, hoc est in duas partes æquales, angulus ACB (*fig.* 22. *tab.* 1.) describatur a puncto C ad quodquumque intervallum arcus FGE, junctaque recta FE, super ipsa constituatur (*per* 1.) triangulum æquilaterum DEF; denique jungatur recta CD, quæ angulum ACB bifariam dividet.

DEMONSTRATIO.

Quoniam latus CE trianguli CDE æquale est lateri CF trianguli CDF (*per axi.* 13.) & latus DE lateri DF (*per constr.*) latus denique CD est utrique triangulo commune, jam evidens est (*per* 8.) hæc duo triangula CDE, CDF esse inter se æqualia, atque adeo angulum ACD æqualem esse angulo BCD; *quod tum facere, tum demonstrare oportebat.*

PROPOSITIO X.

PROBLEMA V.

DAtam rectam lineam finitam bifariam secare.

Describatur super data recta AB (*fig.* 23. *tab.* 1.)

 ian tr-

triangulum æquilaterum ABC (*per* 1.) tum dividatur bifariam (*per* 9.) angulus ACB per rectam CD; quæ lineam AB etiam bifariam secabit in puncto D.

DEMONSTRATIO.

Quoniam latus AC trianguli ADC æquale est lateri CB trianguli CDB (*per constr.*) latus vero CD utrique triangulo est commune, & angulus comprehensus ACD æqualis est item (*per constr.*) angulo comprehenso BCD; hæc duo triangula erunt æqualia (*per* 4.) proindeque basis AD æqualis erit basi BD; *quod erat faciendum, & demonstrandum.*

PROPOSITIO XI.

PROBLEMA VI.

A Puncto dato rectæ lineæ rectam ipsi perpendicularem excitare.

Ut a puncto C dato super recta AB (*fig.* 24. *tab.* 1.) excitetur recta linea, quæ eidem ad rectos angulos insistat, sumantur super ipsa duæ partes æquales CD, CE (*per* 10.) & super recta DE describatur (*per* 1.) triangulum æquilaterum DEF, ut habeatur punctum F, a quo si ducatur ad punctum datum C linea CF, hæc erit rectæ AB perpendicularis.

DEMONSTRATIO.

Quoniam tria latera trianguli CDF æqualia sunt tribus lateribus trianguli CEF; nimirum latus CD æquale est lateri CE, tum latus DF lateri EF (*per constr.*) latus vero CF commune; jam evidens est ea triangula esse æqualia (*per* 8.) proindeque an-

gu-

gulum DCF æqualem esse angulo ECF; atque adeo (*per def.* 10.) lineam FC esse lineæ AB perpendicularem; *quod tum facere, tum demonstrare oportebat.*

PROPOSITIO XII.

PROBLEMA VII.

A Dato puncto extra rectam lineam, aliam rectam perpendicularem ad eandem ducere.

Ut a puncto C extra lineam AB dato (*fig.* 25. *tab.* 1.) ducatur ad ipsam recta perpendicularis; describatur a puncto C arcus quiquumque DFE, qui rectam AB secet in punctis D, & E; divisaque bifariam (*per* 10.) recta DE in puncto F jungatur recta CF, quæ rectæ AB perpendicularis erit.

DEMONSTRATIO.

Si jungantur duæ rectæ CD, CE, apparebit duo triangula CDF, CEF esse æqualia (*per* 8.) latus enim CD æquale est lateri CE (*per axi.* 13,) latus vero DF lateri EF (*per constr.*) latus denique CF utrique triangulo commune; Ergo angulus CFD æqualis erit angulo CFE; proindeque linea CF erit rectæ AB perpendicularis (*per def.* 10.) *quod facere, & ostendere oportebat.*

Usus linearum perpendicularium maximus est, quum in omni Geometria, tum in Physico-mathematica; nihil enim tam frequenter commemoratur ubi de motus corporum refractione agitur, & luminis præsertim, quam hujusmodi rectæ perpendiculares, ad quas radii refracti propius accedunt, aut ab iis recedunt, ubi

ubi a medio unius rationis in aliud oblique migrant, ut ab aëre in aquam, aut vicissim. Quocirca quum angulos refractionum metiri volumus, eos semper comparate ad perpendiculares lineas consideramus. Verum de hoc alibi nonnihil dicendum erit, ubi scilicet de lineis circulos tangentibus sermo erit Libro 3.

PROPOSITIO XIII.

THEOREMA VI.

Ubi recta quæpiam in aliam rectam incidit, vel duos angulos rectos ultra, citraque efficit, vel duobus rectis æquales.

Dico, si recta ED (*fig.* 26. *tab.* 1.) incidat in rectam AB, vel duos rectos angulos hinc inde cum ea efficere, vel duos angulos duobus rectis angulis simul æquales.

DEMONSTRATIO.

Si recta ED sit perpendicularis rectæ AB, evidens est (*per def.* 10.) duos angulos ADE, BDE esse rectos. Quod si minime perpendicularis sit, ut linea CD, excitetur (*per* 11.) a puncto D perpendicularis DE, quæ binos rectos angulos EDA, EDB, una cum recta AB, constituat (*per def.* 10.) quibus quum congruant duo anguli obliqui ADC, BDC, hi erunt duobus rectis æquales (*per axi.* 8.) *quod ostendendum susceperamus.*

COROLLARIUM I.

Hinc sequitur, quod si angulus CDB sit acutus, alter erit necessario obtusus; si vero alter rectus sit,

fit, alter quoque rectus erit, si denique alter sit cognitus; alter quoque erit cognitus.

Ut cognoscatur anguli valor, utuntur Geometræ circulo a vertice anguli descripto; circulum autem dividunt in 360 partes, quas gradus *vocant. Sit igitur angulus BDC* (fig. 4. tab. 1.) *evidens est hunc angulum, una cum angulo ADC, duobus rectis angulis æquivalere. Quum autem horum angulorum ADC, BDC mensura sit semicirculus ACB, hinc sequitur, dimidiam circuli circumferentiam, nimirum 180 gradus, esse mensuram duorum angulorum rectorum. Quocirca si alter angulus, puta BDC, sit 50 graduum, alter ADC erit 130 graduum; quod si uterque rectus esset, unusquisque esset 90 graduum, atque adeo ejus mensura esset quadrans, seu quarta pars circuli. Methodum autem angulos metiendi trademus in fine Libri 6.*

COROLLARIUM II.

Duæ rectæ lineæ sese intersecantes, ut AB, CD (*fig. 27. tab. 1.*) vel quatuor rectos angulos efficiunt, vel quatuor rectis æquivalentes. Eorum enim mensura est integra circuli peripheria. Ex quo infertur, lineas omnes, quamvis infinitæ sint numero, in puncto sese intersecantes, angulos semper efficere quatuor rectis æquales.



PRO-

PROPOSITIO XIV.

THEOREMA VII.

SI ad aliquod rectæ lineæ punctum binæ rectæ lineæ occurrentes duos angulos duobus rectis æquales cum priore constituant, hæ rectæ lineæ in directum erunt oppositæ.

Dico, si duæ rectæ AD, BD (*fig.* 26. *tab.* 1.) concurrentes in punctum D lineæ DE, constituant cum hac eadem linea DE duos angulos duobus rectis æquales, eas esse in directum oppositas, sive unicam rectam lineam AB constituere.

PRÆPARATIO.

In hypothesi, quod duæ rectæ AB, BD sint inclinatæ, producatur altera earum, puta AD, in directum in C (*per* 2. *post.*) adeo ut linea ADC recta fingatur; quoquumque incidat punctum C.

DEMONSTRATIO.

1 Quoniam ADC recta est (*ex hypoth.*) duo anguli ADE, CDE simul sumti erunt æquales duobus rectis (*per* 13.) Atqui etiam duo anguli ADE, BDE sunt æquales duobus rectis (*ex hypoth.*) Ergo duo anguli ADE, CDE sunt æquales (*per axi.* 1.) duobus angulis ADE, BDE simul sumtis; proindeque sublato communi angulo ADE, remanebit angulus CDE æqualis angulo BDE (*per axi.* 3.) scilicet pars toti. Atqui hoc absurdum est (*per axi.* 8.) Ergo linea DC debet cadere super lineam DB; quæ idcirco cum recta AD unicam rectam constituet; *quod ostendendum susceperamus*.

CO-

COROLLARIUM.

Hinc sequitur, si ad idem punctum D ducantur binę rectę AD, BD eidem rectæ DE perpendiculares, has unicam lineam rectam constituere.

PROPOSITIO XV.

THEOREMA VIII.

Si duæ rectæ lineæ sese invicem intersecent, angulos ad verticem oppositos æquales facient.

Dico duas rectas AB, CD (*fig.* 27. *tab.* 1.) quæ sese invicem intersecant in puncto E, angulos ad verticem oppositos æquales efficere, puta angulum AEC angulo BED.

DEMONSTRATIO.

Duo anguli AEC, CEB simul sumti æquales sunt duobus angulis CEB, BED simul sumtis, (*per ax.* 1.) utraque enim summa angulorum æquivalet duobus angulis rectis (*per* 13.) Sublato igitur communi angulo CEB, remanebit angulus AEC æqualis angulo BED (*per axi.* 3.) Eadem ratione demonstrari potest angulus CEB æqualis esse angulo AED, ad verticem sibi opposito; *quod operæpretium erat demonstrare.*

SCHOLIUM.

Conversa pariter hujus propositionis evidens est, & eadem ratione demonstratur; nimirum, si anguli ad verticem oppositi sint æquales, latera, quibus continentur esse in directum posita.

PRO-

PROPOSITIO XVI.

THEOREMA IX.

In quolibet triangulo, producto uno latere, qualiquumque, angulus exterior major est quolibet interiore opposito seorsum sumto.

Dico, in triangulo ABC (*fig.* 28. *tab.* 1.) angulum extriorem CBD, qui fit producto latere AB in D, majorem esse angulo interiore A, vel C sibi oppositis.

PRÆPARATIO.

Diviso latere BC bifariam in E (*per* 10.) ducatur recta AE, producaturque in F, ita ut EF æqualis sit AE; denique jungatur recta BF, similiter diviso bifariam latere AB in G ducatur recta CG, producaturque in H, itaut GH æqualis sit rectæ GC, tum jungatur recta BH, producaturque CB in I.

DEMONSTRATIO.

Quoniam duo latera AE, CE trianguli ACE æqualia sunt duobus lateribus EF, EB trianguli BEF (*per constr.*) & angulus comprehensus AEC æqualis est angulo comprehenso BEF sibi ad verticem opposito (*per* 15.) hæc duo triangula ACE, BEF sunt æqualia (*per* 4.) proindeque angulus ACE æqualis est angulo EBF, atque adeo minor angulo CBD; *quod primo loco erat ostendendum*.

Quoniam duo latera AG, GC trianguli AGC aequalia sunt duobus lateribus GB, GH trianguli BGH (*per constr.*) & angulus comprehensus AGC aequalis est (*per* 15.) angulo comprehenso BGH; hæc duo

trian-

triangula sunt inter se æqualia (*per* 4.) ideoque angulus GAC æqualis erit angulo GBH, adeoque minor angulo GBI; qui quum sit æqualis angulo CBD (*per* 15.) sequitur angulum CAG minorem esse angulo CBD; *quod demonstrandum supererat*.

PROPOSITIO XVII.

THEOREMA X.

IN quolibet triangulo duo anguli quiquumque simul sumti duobus rectis sunt minores.

Dico, in triangulo ABC (*fig.* 28. *tab.* 1.) duos angulos BAC, & ABC simul sumtos, vel si mavis, duos angulos ABC, BCA item simul sumtos, esse minores summa duorum angulorum rectorum.

DEMONSTRATIO.

Producto uno latere, quoquumque, ut AB in D, manifestum est (*per* 16.) angulum CBD majorem esse angulo interiore sibi opposito BAC, vel ACB. Atqui angulus exterior CBD una cum angulo ABC æquivalet summæ duorum angulorum rectorum (*per* 13.) Ergo si loco anguli exterioris CBD addatur angulo ABC angulus interior CAB, qui minor est angulo CBD, summa duorum angulorum CAB, CBA minor erit summa duorum angulorum rectorum. Idem dic, si angulo ABC addatur angulus ACB, qui item minor est angulo exteriori CBD. *Quod ostendendum susceperamus*.

COROLLARIUM.

Ex hac propositione sequitur, non posse ab eodem puncto extra lineam sumto binas rectas duci eidem rectæ perpendiculares; alias enim hæ lineæ efficerent cum ea triangulum, in quo duo anguli simul sumti essent æquales duobus rectis, quod absurdum est.

PROPOSITIO XVIII.

THEOREMA XI.

In omni triangulo angulus major est, qui majori lateri opponitur.

Dico, in triangulo ABC (*fig.* 29. *tab.* 1.) angulum CAB, qui lateri majori CB opponitur, majorem esse angulo B, qui opponitur lateri AC minori.

PRÆPARATIO.

Abscindatur a latere majori CB portio CD æqualis lateri minori AC, jungaturque recta AD, quæ necessario cadet intra triangulum.

DEMONSTRATIO.

Quoniam duo latera CA, CD trianguli ACD sunt æqualia (*per constr.*) duo anguli CAD, CDA sunt æquales (*per* 5.) Et quoniam (*per* 16.) angulus exterior ADC major est interiore opposito B, angulus CAD, & potiori jure totus angulus CAB major erit angulo B; *quod erat ostendendum.*

PRO-

PROPOSITIO XIX.

THEOREMA XII.

IN quolibet triangulo latus majus id est, quod majori angulo opponitur.

Dico, in triangulo ABC (*fig.* 29. *tab.* 1.) latus BC, quod opponitur angulo BAC majori, majus esse latere AC, quod opponitur minori angulo B.

DEMONSTRATIO.

Posito, quod angulus CAB major sit angulo B, latus BC non erit æquale lateri AC, quia angulus B esset æqualis angulo BAC (*per* 5.) quum sit minor (*ex hyp.*) Sed neque erit minus latere AC, nam angulus B esset *major* angulo A (*per* 18.) ergo necessario majus esse debet latere AC; *quod ostendendum susceperamus*.

COROLLARIUM I.

Ex duabus hisce propositionibus sequitur, in triangulo scaleno omnes angulos esse inæquales. Id etiam consequitur ex propositione VI; nam si scalenum duos haberet angulos æquales, etiam duo latera æqualia haberet.

COROLLARIUM II.

In triangulo rectangulo majus latus est *hypotenusa*, seu subtensa recto angulo. Item in ambligonio majus latus est, quod opponitur angulo obtuso.

PROPOSITIO XX.

THEOREMA XIII.

IN omni triangulo duo latera, quæquumque, simul sumta sunt majora tertio.

Dico, in triangulo ABC (*fig.* 30. *tab.* 1.) duo latera AB, AC simul sumta esse majora tertio latere BC.

PRÆPARATIO.

Producatur latus CA in D, & fiat recta AD æqualis lateri AB, jungaturque recta BD.

DEMONSTRATIO.

Quoniam duo latera AB, AD trianguli ABD sunt æqualia (*per constr.*) angulus D æqualis erit angulo DBA (*per* 5.) proindeque minor angulo DBC; Ergo (*per* 19.) latus CD, sive duo latera AB, AC ipsi æqualia, majora erunt latere BC; *quod erat ostendendum.*

COROLLARIUM.

Ex hac propositione sequitur, rectam lineam esse brevissimam omnium linearum, quæ ab uno puncto ad aliud duci possunt; hæcque propositio idcirco tanquam axioma ab Archimede proponitur.



PRO-

PROPOSITIO XXI.

THEOREMA XIV.

SI a puncto aliquo intra triangulum sumto ducantur duæ rectæ ad extrema unius lateris, illæ quidem erunt simul minores reliquis duobus trianguli lateribus; at angulum efficient majorem.

Dico primo, in triangulo ABC (*fig.* 31. *tab.* 1.) duas rectas DA, DB a puncto D ad duo extrema A, & B lateris AB ductas, esse minores duobus lateribus CA, CB.

DEMONSTRATIO.

In triangulo ACE, quod fit producta linea AD in E, duo latera CA, CE simul sumta majora sunt (*per* 20.) tertio latere AE. Ergo si duabus hisce magnitudinibus inæqualibus addatur linea EB, duo latera CA, CB erunt majora duobus EA, EB (*per axi.* 4.) Similiter in triangulo BDE duo latera ED, EB sunt majora tertio DB (*per* 20.) Ergo addita utrique magnitudini recta AD, duæ rectæ DA, DB simul sumtæ minores erunt duabus rectis EA, EB; Atqui duæ rectæ EA, EB ostensæ sunt minores duabus CA, CB; ergo potiori jure duæ rectæ DA, DB erunt duabus CA, CB minores; *quod primo loco opus erat ostendere.*

Dico secundo, angulum ADB majorem esse angulo C.

DEMONSTRATIO.

In triangulo BDE angulus exterior ADB major est

eſt interiore ſibi oppoſito DEB (*per* 16.) qui quum ſit exterior comparate ad triangulum ACE, eſt etiam major interiore oppoſito C (*per* 16.) Ergo potiori jure angulus etiam ADB major erit ipſo angulo C; *quod oſtendendum ſupererat*.

PROPOSITIO XXII.

PROBLEMA VIII.

TRiangulum deſcribere habens tria latera tribus datis rectis lineis, quarum una reliquis duabus ſimul ſumtis minor ſit, æqualia.

Sint datæ tres rectæ AB, AD, AC (*fig.* 32. *tab.* 1.) Igitur, ſi placet, ſumatur pro baſi trianguli, quod deſcribi oportet, linea AC; interim a puncto A deſcribatur arcus ad intervallum longitudinis alterius datæ, ut AB, & a puncto C deſcribatur alter arcus ad intervallum longitudinis lineæ AD, qui ſecet priorem arcum in puncto E, a quo ductæ duæ rectæ ad duo extrema A, & C lineæ AC dabunt triangulum, quod requiſitum fuit.

DEMONSTRATIO.

Quoniam latus AE æquale eſt lineæ AB (*per conſtr.*) & latus CE æquale eſt item (*per conſtr.*) alteri lineæ AD; jam tria latera trianguli ACE tribus datis rectis lineis æqualia erunt; *quod faciendum*, & *demonſtrandum ſuſceperamus*.



PRO-

PROPOSITIO XXIII.

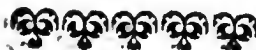
PROBLEMA IX.

IN puncto dato rectæ lineæ angulum efficere æqualem alteri angulo dato.

Ut in puncto D rectæ DE (*fig.* 33. *tab.* 1.) fiat angulus æqualis angulo B dato, ducatur a puncto F, sumto ad libitum super lineam AB, ad punctum G ad libitum item sumtum, recta FG; tum (*per* 22.) super rectam DE describatur triangulum DIH latera habens æqualia tribus lineis BF, BG, FG, itaut DI æquale sit rectæ BG, DH rectæ BF, denique HI, rectæ FG; quocirca etiam angulus D æqualis erit angulo proposito ABC.

DEMONSTRATIO.

Quoniam tria latera trianguli DHI æqualia sunt (*per constr*) tribus lateribus trianguli BGF; hæc duo triangula erunt etiam æquiangula (*per* 8.) proindeque angulus D æqualis erit angulo B, quibus æqualia latera FG, IH subtenduntur; *quod facere, & ostendere opus fuerat.*



PRO-

PROPOSITIO XXIV.

THEOREMA XV.

SI bina triangula duo latera duobus lateribus æqualia habuerint, alterum alteri, at angulus a duobus lateribus unius trianguli comprehensus major sit angulo ab alterius lateribus æqualibus comprehenso, basis quoque majori angulo subtensa major erit basi minori angulo subtensa.

Dico, in duobus triangulis ABC, DEF (*fig.*34. *tab.* 1.) duo latera CA, CB, duobus lateribus FD, FE æqualia habentibus, si angulus C comprehensus in triangulo ABC, major sit angulo DFE trianguli DEF, basim AB etiam majorem esse basi DE.

PRÆPARATIO.

Fiat in puncto F trianguli DEF angulus DFG æqualis angulo C (*per* 23.) per lineam FG æqualem lateri CB, quæ necessario cadet extra triangulum DEF; quum angulus DFG major sit angulo DFE (*ex hyp.*) denique jungatur recta DG.

DEMONSTRATIO.

Quoniam recta DF æqualis est rectæ AC (*ex hyp.*) linea autem FG æqualis rectæ CB, tum angulus DFG æqualis angulo C (*per constr.*) duo triangula ABC, DGF æqualia sunt (*per* 4.) proindeque basis AB æqualis basi DG.

Quoniam item duo latera FE, FG æqualia sunt eidem lateri CB (*per constr.*) erunt inter se æqualia (*per*

(*per axi.* 1) atque adeo angulus FEG, æqualis erit angulo FGE (*per* 5.) proindeque major angulo DG E, qui potiori jure minor erit angulo DEG. Quamobrem linea DG, seu AB ipsi æqualis major erit (*per* 19.) linea DE; *quod ostendendum susceperamus*.

PROPOSITIO XXV.

THEOREMA XVI.

SI bina triangula duo latera habuerint duobus lateribus æqualia, alterum alteri, basis vero unius basi alterius major sit, angulus basi majori oppositus major erit eo, quod minori opponitur.

Dico in duobus triangulis ABC, DEF (*fig.* 34. *tab.* 1) angulum C, qui opponitur majori basi AB, majorem esse angulo DFE, qui minori DE opponitur.

DEMONSTRATIO.

Primum quidem angulus C nequit esse æqualis angulo DFE, nam basis etiam AB æqualis esset basi DE (*per* 4.) ob duo latera CA CB æqualia duobus lateribus FD, FE; quod sane est contra hypothesim. Item nequit angulus C minor esse angulo F; nam basis AB minor esset basi DE (*per* 24.) quod item est contra hypothesim; ergo angulus C major est angulo F; *quod erat ostendendum*.



PROPOSITIO XXVI.

THEOREMA XVII.

SI bina triangula duos angulos duobus angulis æquales habuerint, alterum alteri, & latus unius æquale sit lateri alterius; ea erunt omnino æqualia.

Dico, si in duobus triangulis ABC, DEF (*fig.* 35. *tab.* 1.) angulus A, v.g. sit æqualis angulo D, angulus B angulo DEF, & latus AB lateri DE æquale, ambo esse omnino æqualia.

PRÆPARATIO.

In hypothesi, quod latus DF trianguli DEF minime æquale sit lateri AC trianguli ABC, fiat latus DG æquale eidem lateri AC, quoquumque incidat punctum G, quod sanè in punctum F cadere demonstrabimus; jungatur insuper recta EG.

DEMONSTRATIO.

Quoniam latus DE trianguli DEG æquale est (*ex hypoth.*) lateri AB trianguli ABC; latus vero DG lateri AC (*per constr.*) angulus denique comprehensus D æqualis item est angulo comprehenso A, duo triangula ABC, DEG æqualia sunt (*per* 4.) proindeque angulus B æqualis erit angulo DEG; atqui idem angulus B æqualis est angulo DEF (*ex hyp.*) ergo angulus DEG æqualis erit angulo DEF (*per axi.* 1.) Ex quo colligitur, lineam EG debere cadere super lineam EF (*per axi.* 8.) proindeque lineam DF æqualem esse lineæ AC, & (*per* 4.) totum triangulum DEF æquale esse triangulo ABC; *quod ostendendum susceperamus*.

Hæc

Hæc demonstratio in eo casu procedit, quo ponitur angulus DEF æqualis angulo B. Quod si loco hujus, ponatur angulus F æqualis angulo C, & latus DE æquale sit lateri AB, manente eadem præparatione, evidens est angulum DGE æqualem esse (per 4.) *angulo C, & proinde angulo F, angulus n imirum exterior interiori opposito; quod quum sit absurdum* (per 16.) *hinc è, quod linea EG cum linea EF convenire debeat, sicque totum triangulum DEF æquale erit toti triangulo ABC*; quod erat ostendendum.

PROPOSITIO XXVII.

THEOREMA XVIII.

SI recta linea in binas rectas incidens angulos intra eas contentos alternatim oppositos æquales fecerit, binæ rectæ erunt parallelæ.

Dico, si linea GH (*fig.* 36. *tab.* 1.) in duas rectas AB, CD incidens angulum interiorem AEF æqualem efficiat alteri angulo interiori EFD sibi alternatim opposito, binas rectas AB, CD esse parallelas, sive æquidistantes.

DEMONSTRATIO.

In hypothesi, quod duæ rectæ AB, CD minime sint parallelæ, seu æquidistantes, jam altera ad alteram inclinabitur, adeoque si producantur, in aliquo puncto tandem sibi occurrent, ex. g. in puncto I; proindeque cum recta EF triangulum EFI constituent, in quo angulus exterior AEF erit æqualis angulo interiori opposito EFI, siquidem hi anguli sunt æquales (*ex hypoth.*) Atqui hoc absurdum est (*per* 16.) Ergo

duæ rectæ AB, CD nunquam sibi occurrere possunt, atque adeo sunt parallelæ (*per def.* 35.) *quod demonstrandum susceperamus*.

PROPOSITIO XXVIII.

THEOREMA XIX.

SI recta super binas rectas incidens angulum exteriorem æqualem faciat interiori opposito ad easdem partes; vel si duo anguli interiores ad easdem partes simul sumti æquales sint duobus rectis, duæ rectæ erunt parallelæ.

Dico 1. si linea GH (*fig.* 36. *tab.* 1.) incidens in binas rectas AB, CD, angulum exteriorem GEB æqualem faciat angulo interiori EFD ipsi ad easdem partes opposito, duas rectas AB, CD esse parallelas.

DEMONSTRATIO.

Quoniam angulus EFD æqualis est (*ex hypoth.*) angulo GEB, qui æqualis est (*per* 15.) angulo AEF sibi ad verticem opposito; sequitur (*per axi.* 1.) angulum EFD æqualem esse eidem angulo AEF; proindeque duas rectas AB, CD esse parallelas (*per* 27.) *quod primum erat ostendendum*.

Dico 2. si duo anguli BEF, EFD interiores ad easdem partes simul sumti sint æquales duobus rectis angulis, binas rectas AB, CD esse parallelas.

DEMONSTRATIO.

Quoniam duo anguli BEF, EFD simul sumti sunt æquales duobus rectis (*ex hypoth.*) & vicissim duo anguli BFE, AEF sunt item æquales duobus rectis (*per* 13.) si ab utraque summa auferatur communis angulus BEF, remanebit angulus EFD æqualis (*per axi* 3.) angulo alternatim opposito AEF; proindeque duæ rectæ AB, CD erunt parallelæ (*per* 27.) *quod ostendendum supererat*.

L E M M A.

Recta linea, quæ uni ex duabus parallelis est perpendicularis, est etiam perpendicularis alteri.

Dico, lineam EF (fig. 37. tab. 1.) *quæ rectæ CD est perpendicularis, alteri etiam AB, quæ priori CD est parallela, esse pariter perpendicularem.*

PRÆPARATIO.

Sumtis super recta CD duabus partibus æqualibus FG, FH, excitentur (per 11.) *a punctis G, & H duæ rectæ GI, HK eidem CD perpendiculares; tum jungantur duæ rectæ FI, FK.*

DEMONSTRATIO.

Quoniam latus FG trianguli rectanguli FGI est æquale (per constr.) *lateri FH trianguli rectanguli FHK, latus vero GI æquale lateri HK* (per axi. 11.) *hæc duo triangula rectangula FGI, FHK erunt æqualia* (per 4.) *proindeque basis FI æqualis erit basi FK, & duo anguli GFI, HFK erunt similiter æqua-*

æquales; *qui idcirco*, *si auferantur a duobus angul EFC*, *EFD rectis* (ex hypoth.) *adeoque æqualibus* (per def. 10.) *restabunt duo anguli EFI*, *EFK æquales* (per axi. 3.) *quamobrem etiam duo triangula EFI*, *EFK erunt æqualia* (per 4.) *ob latus FI æquale lateri FK*, *&* *latus EF commune*, *atque ob angulos EFI*, *EFK comprehensos æquales*, *ut modo ostendimus*. *Quare duo anguli FEI*, *FEK erunt pariter æquales*, *&* *proinde recti* (per def. 10.) *atque adeo recta FE erit lineæ AB perpendicularis*; quod demonstrandum susceperamus.

PROPOSITIO XXIX.

THEOREMA XX.

Recta linea in binas rectas parallelas incidens angulos internos alternatim oppositos æquales efficit, tum angulum exteriorem æqualem interiori ad easdem partes opposito; duos angulos denique interiores, item ad easdem partes, simul æquales duobus angulis rectis.

Dico 1: rectam GH (*fig.* 38. *tab.* 1.) quæ in duas parallelas AB, CD incidit, angulos alternos AEF, EFD æquales efficere.

PRÆPARATIO.

Excitetur a puncto F recta FI perpendicularis rectæ CD (*per* 11.) quæ rectæ etiam AB perpendicularis erit (*per Lemma præcedens*) item a puncto E excitetur recta EK perpendicularis rectæ AB, quæ alteri etiam CD perpendicularis erit.

DE.

DEMONSTRATIO.

Quoniam duæ rectæ FI, KE sunt perpendiculares duabus parallelis AB, CD (*per constr.*) sunt æquales (*per axi.* 11.) & insuper duo anguli IFK, EKF recti (*per def.* 10.) proindeque æquales duobus rectis. Ergo (*per* 28.) duæ rectæ FI, KE sunt parallelæ; quibus quum duæ rectæ IE, FK sint perpendiculares erunt inter se æquales (*per axi.* 11.) Quare duo triangula EFI, EFK (*per* 8.) erunt inter se æqualia ob duo latera KF, KE æqualia duobus lateribus IE, IF, obque latus EF commune. Itaque angulus FEI æqualis erit angulo EFK alternatim sibi opposito quibus æqualia litera FI, KE subtenduntur; *quod primo loco erat ostendendum*.

Dico 2. angulum exteriorem GEB æqualem esse angulo interiori ad easdem partes sibi opposito EFK.

DEMONSTRATIO.

Quoniam angulus EFD ostensum est æquale angulo AEF, cui sane æqualis est angulus GEB ad verticem sibi oppositus (*per* 15.) evidens est duos angulos GEB, EFD esse æquales (*per axi.* 1.) *quod secundo loco erat ostendendum*.

Dico 3. duos angulos BEF, EFD internos ad easdem partes esse simul duobus rectis æquales.

DEMONSTRATIO.

Quoniam duo anguli BEF, AEF sunt simul æquales duobus rectis (*per* 13.) si loco anguli AEF sumatur angulus EFD ipsi æqualis (*per primam demonstrationem*) manifestum erit (*per axi.* 2. & 3.) duos angulos BEF, EFD esse simul æquales duobus rectis; *quod postremo erat ostendendum*.

PRO-

PROPOSITIO XXX.

THEOREMA XXI.

OMnes rectæ lineæ, quæ alteri rectæ sunt parallelæ, sunt inter se parallelæ.

Dico, duas rectas AB, CD (*fig.* 39. *tab.* 1.) esse sibi invicem parallelas, si sint alteri rectæ EF parallelæ.

PRÆPARATIO.

Ducatur quælibet recta, GH, quæ secet tres propositas rectas AB, EF, CD, in tribus punctis I, K, H.

DEMONSTRATIO.

Quoniam duæ rectæ AB, EF sunt parallelæ (*ex hypoth.*) angulus GIB æqualis erit angulo IKF (*per* 29.) Similiter, quoniam duæ rectæ CD, EF sunt parallelæ (*ex hypoth.*) angulus IKF æqualis item erit angulo KHD (*per* 29.) Ergo angulus KHD æqualis erit angulo GIB (*per axi.* 1.) proindeque (*per* 28.) linea AB erit lineæ CD parallela; *quod ostendendum susceperamus*.

PROPOSITIO XXXI.

PROBLEMA X.

A Dato puncto rectam lineam ducere parallelam alteri lineæ datæ.

Ut a dato puncto C (*fig.* 40. *tab.* 1.) ducatur recta linea parallela datæ AB, ducatur ab eodem puncto C recta

dà, quæquumque, CD secans datam rectam AB in aliquo puncto, v. g. in D; fiatque in puncto C (*per* 23.) angulus DCE æqualis angulo ADC per rectam CD, quæ datæ AB parallela erit.

DEMONSTRATIO.

Quoniam duo anguli alternatim oppositi ADC, DCE æquales sunt (*per constr.*) duæ rectæ AB, CE sunt parallelæ (*per* 27.) *quod facere, & demonstrare opus fuerat.*

Linearum parallelarum usus, sive eæ curvæ sint, sive rectæ, non minor est, quam perpendicularium in Physicis. Etenim præter ea, quæ de circulis parallelis, sive æquidistantibus, passim memorantur in Astronomia, qui nempe vel axem communem habent, vel saltem axes invicem parallelos; in Optica, Dioptrica, & Catoptrica, semper ac de radiis ab objectis emissis agitur, ii fere, ut paralleli inter se, considerantur, atque sub hac ratione, quæ, & quanta sit eorum refractio, vel reflexio, quæ varia est pro varietate superficiei, in quam incidunt, investigatur:

PROPOSITIO XXXII.

THEOREMA XXII.

IN quolibet triangulo, uno latere producto, angulus exterior æqualis est duobus interioribus oppositis simul sumtis. Anguli vero omnes interiores æquales sunt duobus rectis angulis.

Dico 1, in triangulo ABC (*fig.* 1. *tab.* 2.) producto quoquumque latere, v. g. AB in D, angulum

exteriorem CBD æqualem esse duobus interioribus oppositis A, & C simul sumtis.

PRÆPARATIO.

Fiat (*per* 23.) in puncto B angulus DBE æqualis angulo A; per lineam BE, quæ (*per* 28.) lateri AC erit parallela; & (*per* 29.) angulus CBE æqualis erit angulo C alternatim sibi opposito.

DEMONSTRATIO.

Quoniam angulus CBE æqualis est angulo C alternatim sibi opposito (*per* 29.) ob lineam CB, quæ in duas parallelas AC, BE incidit; & insuper angulus EBD æqualis est (*per constr.*) angulo A; evidens est, duos angulos EBC, EBD simul sumtos, seu totum angulum exteriorem CBD æqualem esse duobus interioribus oppositis A, & C; *quod primum erat ostendendum*.

Dico 2, tres angulos A, C, & ABC simul sumtos esse æquales duobus angulis rectis.

DEMONSTRATIO.

Duo anguli CBA interior, & CBD exterior sunt simul æquales duobus angulis rectis (*per* 13.) Atqui angulus exterior CBD ostensus est æqualis duobus interioribus angulis A, & C; ergo tres anguli A, C, & ABC simul sumti duobus rectis sunt æquales; *quod demonstrandum supererat*.

COROLLARIUM I.

Tres anguli cujusquumque trianguli simul sumti tribus angulis alterius trianguli, item simul sumtis, æqua-

æquales ſunt ; utraque enim ſumma ſeorſum ſumta duobus rectis angulis æquivalet.

COROLLARIUM II.

Si duo anguli unius trianguli duobus angulis alterius trianguli, alter alteri, æquales ſint, tertius angulus quoque unius tertio angulo alterius æqualis erit.

COROLLARIUM III.

In triangulo rectangulo duo acuti anguli ſimul ſumti æquales ſunt uni recto.

COROLLARIUM. IV.

Quilibet angulus trianguli æquilateri eſt triens ſummæ duorum angulorum rectorum ; proindeque ejus menſura erit arcus 60 graduum, ſeu ſextans circuli.

COROLLARIUM V.

Omnes anguli cujuslibet polygoni ſimul ſumti æquivalent bis tot angulis rectis, quot ſunt latera polygoni, demtis quatuor rectis angulis. Anguli igitur exagoni ABCDEF (*fig.* 4. *tab.* 2.) æquivalent 12 angulis rectis, demtis 4. Etenim a quolibet angulo duci poſſunt ad punctum G, quod eſt centrum exagoni, rectæ lineæ, quæ exagonum divident in 6 triangula, quorum ſingulorum anguli duobus rectis æquales erunt. Itaque in polygono ABCDEF duodecim ſunt anguli recti, ex quibus ſi 4 demas, qui ad centrum ſunt, angulos, reliqui ad circumferentiam poſiti erunt 8 rectis angulis æquales. Eodem modo de-

monstrari potest, angulos pentagoni æquivalere 6 angulis rectis; quadrilateri vero 4. &c.

COROLLARIUM VI.

Si producantur latera polygoni, anguli exteriores simul sumti æquales sunt 4 rectis angulis; id autem consequitur quum ex hac, tum ex propositione XIII.

PROPOSITIO XXXIII.

THEOREMA XXIII.

Duæ rectæ lineæ sunt æquales, & parallelæ, si duas rectas æquales, & parallelas simul connectant.

Dico, duas rectas AC, BD (*fig.* 2. *tab.* 2.) esse æquales, & parallelas, si duas AB, CD æquales, & parallelas contineant.

DEMONSTRATIO.

Ducta recta AD, manifestum est duo triangula ABD, ACD esse æqualia (*per* 4.) ob duo latera AD, CD æqualia (*ex hyp.*) duobus lateribus AD, AB; obque angulum comprehensum ADC æqualem (*per* 29.) angulo alterno DAB, item comprehenso; Ergo etiam recta AC æqualis erit rectæ BD; *quod ostendere opus erat*.



PRO-

PROPOSITIO XXXIV.

THEOREMA XXIV.

IN quolibet parallelogrammo quum anguli, tum latera opposita sunt inter se æqualia.

Dico 1. in parallelogrammo ABDC (*fig.*2. *tab.*2.) angulos oppositos B, & C, tum BAC, BDC esse æquales.

DEMONSTRATIO.

Quoniam duæ rectæ AB, CD sunt parallelæ (*ex hyp.*) duo anguli alterni BAD, ADC sunt æquales (*per* 29.) haud secus atque duo ADB, DAC, item alterni, ob duas parallelas AC, BD. Quare etiam angulus B æqualis erit angulo C (*per* 32.) & (*per axi.* 2.) totus angulus BAC æqualis erit toti angulo BDC; *quod primum erat ostendendum*.

Dico 2. duo latera AB, CD esse æqualia, non secus ac duo AC, BD.

DEMONSTRATIO.

Quoniam duo triangula ADC, ADB duos angulos C, & CDA æquales habent duobus angulis B, & BAD, alterum alteri, ut modo ostendimus, & latus AD commune, ea sunt æqualia (*per* 26.) proindeque etiam duo latera AC, CD erunt æqualia duobus lateribus BD, BA, alterum alteri sibi opposito; *quod ostendendum supererat*.

COROLLARIUM I.

Recta linea, quæ per angulos oppositos parallelo-

logrammi transit, in duo triangula æqualia ipsum dividit; eaque idcirco *Diagonalis* vocatur.

COROLLARIUM II.

Si per punctum aliquod in Diagonali sumtum ducantur duæ rectæ duobus parallelogrammi lateribus parallelæ, hæ divident parallelogrammum in 4 parallelogramma, quorum duo, per quæ diagonalis non transit, erunt inter se æqualia. Videlicet in parallelogrammo ABCD (*fig.* 18. *tab.* 2.) duo parallelogramma DGEI, EFBH, sunt æqualia. Etenim si a duobus triangulis æqualibus ABC, ADC auferantur duæ partes æquales AEH, AEG, tum duæ CEF, CEI, item æquales, jam manifestum est, duo parallelogramma DGEI, EFBH esse æqualia (*per axi* 3.)

PROPOSITIO XXXV.

THEOREMA XXV.

Parallelogramma sunt æqualia, quæ communem habent basim, & intra easdem parallelas sunt constituta.

Dico, duo parallelogramma EHGF, EHKI (*fig.* 3. *tab.* 2.) quæ communem habent basim EH, atque intra duas parallelas AB, CD constituta sunt, esse æqualia.

DEMONSTRATIO.

Quoniam duo latera FG, IK sunt æqualia basi EH (*per* 34.) sunt æqualia inter se (*per axi.* 1.) igitur si utrique addatur recta GI, habebitur recta FI æqualis rectæ GK (*per axi.* 2.) proindeque triangu-

angulum FEI æquale erit (*per* 8.) triangulo GHK, ob latus nimirum FI æquale lateri GK, tum ob duo latera EF, EI æqualia duobus lateribus HG, HK (*per* 34.) Quare ſi ab utraque ſumma auferas commune triangulum GLI, remanebit trapezium EFGL æquale (*per axi.* 3.) trapezio HKIL; ſi vero utrique trapezio addas commune triangulum EHL, habebis parallelogrammum EHGF æquale parallelogrammo EHKI (*per ax.* 2.) *quod oſtendendum ſuſceperamus.*

COROLLARIUM.

Parallelogramma, quæ æqualem habent baſim, & intra eaſdem parallelas ſunt conſtituta, ſunt æqualia. Videlicet duo parallelogramma EHGF, IMLK (*fig.* 5. *tab.* 2.) quæ æquales habent baſes EH, IM ſunt inter ſe æqualia (*per axi.* 1.) quum ſint æqualia eidem parallelogrammo EHIK; quod ſane oſtendit Euclides Propoſitione XXXVI, quam idcirco omittimus.

PROPOSITIO XXXVII.

THEOREMA XXVII.

TRiangula ſunt æqualia, quæ communem habent baſim, & intra eaſdem parallelas ſunt conſtituta.

Dico, duo triangula EFG, EFH (*fig.* 6. *tab.* 2.) quæ communem habent baſim EF, & intra duas parallelas AB, CD ſunt conſtituta, eſſe inter ſe æqualia.

PRÆPARATIO.

Sumantur ſuper linea AB duæ partes AG, & HB æqua-

æquales basi FE, jungaturque recta EA, quæ erit parallela, & æqualis rectæ FG (*per* 33.) item jungatur recta FB, quæ rectæ EH erit item parallela, & æqualis; ex quo fit, ut duo quadrilatera EFGA, EFBH sint parallelogramma (*per* 34.)

DEMONSTRATIO.

Quoniam latus EG trianguli EFG est diagonalis parallelogrammi EFGA, triangulum EFG erit ejus dimidium (*per* 34.) obque eandem rationem triangulum EFH erit dimidium parallelogrammi EFBH. Atqui duo parallelogramma EFGA, EFBH sunt æqualia (*per* 35.) ergo etiam eorum dimidia, nimirum duo triangula EFG, EFH, erunt æqualia (*per axi.* 7.) *quod operæpretium erat demonstrare.*

COROLLARIUM I.

Hinc sequitur, triangula, quæ æquales habent bases, & sunt intra easdem parallelas constituta, ut EFG, HIK (*fig.* 8. *tab.* 2.) esse inter se æqualia; ambo enim sunt dimidia duorum parallelogrammorum EFGA, HIBK, quæ sunt æqualia (*per* 35.) quod quidem demonstratur ab Euclide Propositione XXXVIII, quæ idcirco omittitur.

COROLLARIUM II.

Parallelogrammum est duplum trianguli, si ambo eandem habeant basim, & intra easdem parallelas constituta sint. Sic parallelogrammum EFGH (*fig.* 10. *tab.* 2.) est duplum trianguli EFI; siquidem triangulum EFI est æquale triangulo EFG, quod (*per* 34.) est dimidium parallelogrammi EFGH; id quod ostendit Euclides Prop. XXXXI, quam idcirco omittemus.

PRO-

PROPOSITIO XXXIX.

THEOREMA XXIX.

TRiangula æqualia, quæ eandem habent basim, intra easdem parallelas sunt constituta.

Dico, si duo triangula ABC, ABD (*fig.*9. *tab.* 2.) eandem basim AB habentia sint æqualia, rectam CD ductam per eorum verticem, parallelam esse basi AB.

PRÆPARATIO.

In hypothesi, quod linea CD non sit parallela basi AB, ducatur a puncto C recta CE eidem AB parallela, (*per* 31.) quoquumque incidat hæc linea, quam sane supra lineam CD cadere ostendemus. Jungatur insuper recta BE.

DEMONSTRATIO.

Quoniam duo triangula ABC, ABE eandem habent basim AB, & sunt intra easdem parallelas AB, CE (*per constr.*) ea sunt inter se æqualia (*per* 37.) Hinc triangulum ABE æquale erit triangulo ABD (*per axi.* 1.) ex quo manifestum est rectam CE convenire debere (*per axi.* 8.) cum recta CD, quæ proinde basi AB erit parallela; *quod ostendendum susceperamus.*

Eodem modo demonstrari potest Prop. XL, qua dicitur, triangula æqualia, quæ æquales habent bases, esse intra easdem parallelas constituta; siquidem idem omnino est habere bases æquales, ac basim habere communem.

PROPOSITIO XLII.

PROBLEMA XI.

DAto triangulo æquale parallelogrammum describere habens angulum æqualem angulo rectilineo dato.

Ut fiat parallelogrammum æquale triangulo ABC (*fig.* 11. *tab.* 2.) habens angulum æqualem dato angulo D, ducatur a puncto C recta CG paralela basi AB (*per* 31.) divisaque basi AB bifariam in E (*per* 10.) fiat in puncto E angulus BEF æqualis angulo D dato per rectam EF (*per* 23.) Denique a puncto B ducatur recta BG parallela rectæ EF (*per* 31.) quæ parallelogrammum EBGF constituet æquale triangulo ABC.

DEMONSTRATIO.

Si jungatur recta CE, manifestum est, duo triangula ACE, BCE esse æqualia (*per* 37.) proindeque triangulum ABC esse duplum trianguli BCE. Atqui etiam parallelogrammum EBGF duplum est trianguli BCE (*per* 37.) ergo erit æquale triangulo ABC (*per axi.* 6.) *quod faciendum, & demonstrandum suscepe-ramus.*

Omittimus hic Prop. XLIII, & XLIV, quum sine ipsis sequens Propositio optime demonstretur, atque aliunde non magni sint usus in Geometria. Et sane XLIII. est corollarium Propositionis XXXIV.

PRO-

PROPOSITIO XLV.

PROBLEMA XIII.

Parallelogrammum describere æquale rectilineo dato angulum habens æqualem angulo dato.

Ut describatur parallelogrammum æquale rectilineo ABCD (*fig. 7. tab. 2.*) debet prius triangulum ipsi æquale constitui. Ducta itaque diagonali DB, ducatur a puncto C recta CE parallela eidem DB (*per* 31.) productoque latere AB in E jungatur recta DE, quæ triangulum ADE constituet æquale rectilineo, seu trapezio ABCD.

DEMONSTRATIO.

Quoniam duo triangula BDC, BDE habent basim communem BD, & sunt intra duas parallelas DB, CE, sunt æqualia (*per* 37.) Si igitur ab iis auferatur commune triangulum BDF, remanebit (*per axi.* 3.) triangulum BFE æquale triangulo DFC. Ergo si a trapezio ABCD auferatur portio DFC, cujus loco addjiciatur portio eidem æqualis BFE, manifestum est, triangulum ADE futurum æquale trapezio ABCD. Huic porro triangulo ADE fieri poterit æquale parallelogrammum (*per* 42.) habens angulum æqualem cuilibet angulo dato; *Quod facere, & ostendere opus erat.*

Si quis parallelogrammum rectangulum rhomboidi EHKI (fig. 3. tab. 2.) *æquale constituere velit, excitatis a punctis E, & H perpendicularibus EF, GH, hæ dabunt rectangulum, quod inquiritur.*

PROPOSITIO XLVI.

PROBLEMA XIV.

Super datam rectam lineam quadratum describere.

Ut describatur quadratum super datam rectam AB (*fig.* 12. *tab.* 2.) ducantur (*per* 11.) ab extremis A, & B duæ rectæ AD, BC rectæ AB perpendiculares, & æquales, jungaturque recta CD; quo facto figura ABCD erit quadratum.

DEMONSTRATIO.

Quoniam lineæ AD, BC sunt æquales lineæ AB (*per constr.*) sunt inter se æquales (*per axi* 1.) Et quoniam sunt perpendiculares eidem AB erunt parallelæ (*per* 28.) Ergo etiam duæ rectæ AB, & CD erunt æquales, & parallelæ (*per* 33.) proindeque quatuor latera AB, BC, CD, DA erunt æqualia.

Quoniam igitur figura ABCD è parallelogrammum angulus D æqualis erit angulo B sibi opposito, & angulus BCD æqualis angulo BAD item sibi opposito (*per* 34.) quumque duo anguli B, & BAD recti sint (*per def.* 10.) sequitur, reliquos duos D, & DCB esse rectos; *quod facere*, *& demonstrare opus fuerat*.



PROPOSITIO XLVII.

THEOREMA XXXIII.

IN triangulis rectangulis quadratum hypotenusæ, seu subtensæ angulo recto, æquale est duobus quadratis, quæ fiunt sub lateribus rectum angulum continentibus, simul sumtis.

Dico, quadratum quod fit sub linea AB (*fig.*13. *tab.* 2.) quæ subtenditur angulo recto ACB, nimirum quadratum ABDH, æquale esse duobus quadratis BC FG, ACPE, quæ fiunt sub lateribus AC, BC rectum angulum continentibus.

PRÆPARATIO.

Ducatur ab angulo recto C recta CL perpendicularis hypotenusæ AB ipsam intersecans in puncto K, junganturque rectæ CH, CD, AG, BE.

DEMONSTRATIO.

Quoniam duo triangula ABG, BDC habent duo latera AB, BG æqualia duabus lateribus BD, BC, & angulus ABG comprehensus in triangulo AGB æqualis est angulo CBD item comprehenso in triangulo BDC (*per axi.* 10. & 2.) uterque enim constat ex angulo recto, & communi acuto ABC, hæc duo triangula erunt æqualia (*per* 4.) Atqui triangulum ABG est dimidium parallelogrammi BGFC ejusdem Basis BG, & intra easdem parallelas BG, AF constituti, (*per* 37.) & vicissim triangulum BDC est dimidium parallelogrammi BDLK ejusdem basis BD, & intra easdem paral-

parallelas BD, CL item constituti; ergo duo parallelogramma BDLK, BGFC sunt æqualia (*per axi.* 6.)

Eodem modo ostendi potest parallelogrammum AHLK æquale esse alteri quadrato ACPE, quum utrumque sit duplum duorum triangulorum ACH, ABE, quæ sunt æqualia (*per* 4.) Ex quo concluditur totum quadratum ABDH æquale esse duobus quadratis BCFG, ACPE; *quod operæpretium erat demonstrare.*

Hæc demonstratio postulat, duas rectas AC, CF esse in directum positas, seu unicam lineam constituere, non secus, ac duas BC, CP; quod sane evidens est, duo anguli enim ACB, ACP (non secus ac duo BCA, BCF) sunt recti, proindeque æquales duobus rectis, ex quo sequitur, duas lineas AF, BP esse rectas (per 14.)

Postulat etiam lineam CL esse duabus rectis AH, BD parallelam; quod patet (per 28.) *nam singulæ sunt perpendiculares eidem lineæ AB* (per constr.)

Celeberrimum hocce Theorema Pythagoram primum solvisse ferunt, qui, ut aliqui existimant, centum boves musis immolavit, quod se in tam præclaro invento adjuverint; quod tamen Tullius lib. 3. *de nat. Deorum in dubium revocat.*

COROLLARIUM.

Quadratum diagonalis AC quadrati ABCD, (*fig.* 12. *tab.* 2.) est duplum ejusdem quadrati, est enim æquale duobus quadratis duorum laterum æqualium, puta BA, BC. Ratio est, quia diagonalis quadrati est hypotenusa trianguli rectanguli ABC. In parallelogrammo item rectangulo, quadratum diagonalis æquale est duobus quadratis, quæ fiunt sub duobus ejusdem parallelogrammi lateribus.

Hæc propositio ejusmodi est, ut nulla fere sit Geome-

metriæ pars, in qua passim ea non adhibeatur, ut quum pluribus in locis, tum in Trigonometriæ synopsi videbimus. Ejus ope item plura resolvuntur problemata, quæ maximi sunt usus in Geometria, & in Physicis. Ex.g. si quis velit quadratum describere æquale tribus, vel pluribus quadratis datis, puta tribus quadratis, quæ concipi possunt sub tribus lineis AD, DE, EF (fig. 14. tab. 2.) *statuatur recta AD perpendicularis rectæ DE; si jungatur recta AE manifestum est, quadratum AE æquale esse duobus quadratis AD, DE. Quod si statuatur recta EF perpendicularis rectæ AE, juncta recta AF, manifestum est, quadratum AF æquale esse tribus quadratis AD, DE, EF.*

Datis etiam pluribus circulis, puta circulo, cujus diameter est AB (fig. 15. tab. 2.) *tum circulo, cujus item diameter est AD, inveniri potest circulus ipsis æqualis. Si enim a puncto A semidiametri AD excitetur perpendicularis AC æqualis semidiametro AB, juncta recta CD, hæc erit radius circuli æqualis duobus propositis circulis simul sumtis. Nam circuli sunt inter se, ut quadrata diametrorum, aut semidiametrorum, ut demonstrabimus in Libro* 12;*atqui quadratum radii CD æquale est quadratis duorum radiorum AC, AD; ergo etiam ejus radii circulus æqualis erit duobus circulis AB, AD.*



LEM-

LEMMA.

Quadrata super duas æquales lineas descripta sunt æqualia.

Dico, si duæ rectæ AB, EF (fig. 12. tab. 2. *sint æquales, quadratum prioris æquale esse quadrato alterius.*

DEMONSTRATIO.

Si ducantur duæ diagonales AC, EG, hæ duo quadrata proposita bifariam divident (per 34.) *quare triangulum ABC erit dimidium quadrati ABCD, & triangulum EFG dimidium quadrati EFGH. Atqui hæc duo triangula sunt æqualia* (per 4.) *ob duo latera BC, BA æqualia duobus lateribus FG, FE* (ex hypoth.) *obque angulum B æqualem angulo F* (per axi. 10.) *ergo etiam eorum dupla, nimirum duo quadrata proposita, erunt æqualia* (per axi. 6.) quod erat ostendendum.

PROPOSITIO XLVIII.

THEOREMA XXXIV.

Si in triangulo quadratum unius lateris æquale sit summæ quadratorum aliorum laterum, angulus oppositus lateri quadrati majoris rectus erit.

Dico, si in triangulo ABC (*fig.* 16. *tab.* 2.) quadratum lateris BC æquale sit duobus quadratis, quæ concipi possunt sub duobus lateribus AB, AC, angulum CAB esse rectum.

RPÆ-

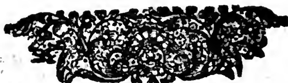
PRÆPARATIO.

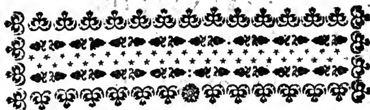
Ducatur (*per* 11.) recta AD perpendicularis rectæ AC, & æqualis rectæ AB; jungaturque recta CD.

DEMONSTRATIO.

Quoniam angulus CAD rectus est (*per constr.*) quadratum lateris CD æquale est duobus quadratis AC, AD simul sumtis (*per* 47.) Et quoniam latus AD æquale est lateri AB (*per constr.*) quadratum lateris AD æquale erit quadrato lateris AB (*per lemma præcedens*) quare quadratum CD erit æquale duobus quadratis AB, AC simul sumtis; quæ quum sint simul æqualia quadrato CB (*ex hypoth.*) jam quadratum CD æquale erit quadrato BC (*per axi.* 1.) proindeque duo latera CB, CD æqualia; & (*per* 8.) triangulum ABC æquale triangulo ADC, & angulus CAD æqualis augulo CAB (*per* 13.) qui idcirco erit rectus, *quod erat ostendendum*.

Finis Libri Primi.





LIBER SECUNDUS.



Xplicata Parallelogrammi in genere natura in primo Libro, pergit modo Euclides ad explicandas proprietates parallelogrammi rectanguli, quod *Rectangulum* uno nomine vocari solet, conferens inter se quadrata, & rectangula, quæ sub aliqua recta linea, quomodocumque secta, conficiuntur.

DEFINITIONES.

I. Omne *parallelogrammum rectangulum* contineri dicitur sub duabus rectis lineis rectum angulum continentibus, quæ duæ rectæ ejus longitudinem, & latitudinem exhibent. *Sic figura ABCD* (fig. 17. tab. 2.) *dicitur* Parallelogrammum rectangulum; *sive absolute*, Rectangulum, *quod sub duabus rectis AB, AD rectum angulum A continentibus comprehendi intelligatur. Quod si duæ rectæ æquales sint inter se, hujusmodi rectangulum dicitur* Quadratum. *Rectangulum utplurimum concipi solet, quin in tabula sit exaratum; sufficit enim, si duæ rectæ, sub quibus fieri potest, exhibeantur. Quod idem dic de quadrato, pro quo unica sufficit linea; siquidem omnia ejus latera æqualia sunt.*

Quantitas superficiei alicujus rectanguli, quæ rect-

rectanguli area *dicitur*, *meritur totidem quadratis*, *in quot ipsum dividi potest*; *sic rectangulum ABCD* (fig. 17. tab. 2.) *in quindecim quadrata dividitur*; *quæ*, *vel sunt* palmi, *vel* pedes quadrati, *vel* exapedæ, *seu* sexpedæ, &c. *Quum enim superficies concipiatur produci per lineam in transversum se moventem*, *si lineam aliquam*, *ut AD*, *super aliam AB ita moveri cogitemus*, *ut ipsi ad angulos rectos semper insistat*, *ubi hæc ad B pervenerit*, *superficiem rectangulam ABCD ab ea descriptam fuisse intelligemus*.

Ex quo colligitur, *cognitis duabus lineis*, *rectanguli sub ipsis contenti aream statim cognosci posse*; *si enim una per alteram ducatur*, *productum dabit aream rectanguli*: *Ex. g. si linea AD sit* 3 *pedum*, *linea vero AB* 5 *pedum*, *ducto* 5 *per* 3, *habebis* 15 *pedes quadratos*, *quæ est area rectanguli ABCD*. *Hæ lineæ aliquando numeris exprimuntur*, *quum scilicet possunt dividi ex æquo in partes ejusdem magnitudinis*, *ut linea AB*, *quæ in quinque partes dividitur*, *quarum singulæ æquales sunt singulis partibus lineæ AD*; *secus si sint incommensurabiles*, *ut videbimus infra*; *tunc enim rectangulum*, *nec numeris integris exprimi*, *nec in quadrata dividi potest*.

Colligitur etiam, *cognita lineæ alicujus longitudine*, *ejusdem quadratum cognosci*; *si enim lineam aliquam per se ipsam ducas*, *ut lineam* 4 *pedum*, *productum* 16 *erit ejusdem lineæ quadratum*. *Hinc omnis numerus*, *qui ex aliquo numero exsurgit in seipsum ducto*, *dicitur* numerus quadratus; *numerus vero ille*, *ex cujus multiplicatione exsurgit numerus quadratus dicitur* radix quadrata; *sic* 2 *est radix* 4; 3 *radix* 9; 4 *radix* 16; *&c. etenim* 4. 9. 16. *sunt numeri quadrati*; *nam omnes unitates*, *ex quibus constant*, *in formam quadratam disponi possunt*. *Verum de his alibi dicendum erit*.

II. Si per aliquod punctum sumtum ad libitum

 super

ſuper diagonalem trianguli ducantur duæ rectæ parallelæ duobus rectanguli lateribus, proindeque ad rectos angulos ſeſe interſecantes, quatuor exſurgent rectangula, quorum duo, per quæ non tranſit diagonalis, una cum altero, per quæ diagonalis tranſit, figuram efficient, quæ *Gnomon* dicitur. *Quocirca duo rectangula DGEI, EFBH* (fig. 18. tab. 2.) *una cum rectangulo EFCI, gnomonem GCHE conſtituunt.*

MONITUM.

Quum rectangula, tum quadrata duabus fere literis notabimus, quæ nimirum ad angulos oppoſitos ſunt collocatæ.

PROPOSITIO I.

THEOREMA I.

SI ex duabus lineis altera ſecetur in quot libuerit puncta, rectangulum, quod fit ſub hiſce duabus lineis, æquale erit ſimul omnibus rectangulis; quæ fiunt ſub ea, quæ minime diviſa eſt, & ſingulis partibus alterius.

Dico, rectangulum AC (*fig.* 19. *tab.* 2.) quod fit ſub duabus AB, AD, æquale eſſe tribus rectangulis AG, EH, FC ſimul ſumtis, quæ nimirum fiunt ſub tota AD, & partibus AE, EF, FB lineæ AB; quocirca ſi linea AB ſit 6 pedum, quælibet vero pars, ut AE, EF, FB, 2 pedum; linea vero AD 4 pedum; rectangulum 24 æquale erit tribus rectangulis 8. Idipſum in omnibus fere propoſitionibus hujus libri uſuvenit.

PRÆ-

PRÆPARATIO.

Ducantur a punctis sectionum E, & F rectæ EG, FH lineæ AB perpendiculares, quæ erunt tum sibi invicem, tum duobus lateribus AD, BC parallelæ (*per* 28. & 30. *libri* 1.) ob angulos rectos, qui sunt in punctis A, E, F, B (*per def.* 10. 1. & insuper erunt æquales (*per* 34. 1.) ob tria parallelogramma AG, EH, FC.

DEMONSTRATIO.

Manifestum est, rectangulum AG esse sub linea AD, & prima sectionis parte AE; rectangulum EH sub linea EG, vel AD ipsi æquali, & altera sectionis parte EF; rectangulum denique FC sub linea FH, vel AD ipsi æquali, & postrema sectionis parte FB; & quoniam tria hæc rectangula congruunt cum toto rectangulo AC, sequitur (*per axi.* 8.) rectangulum, quod fit sub linea AD, & tota AB, æquale esse omnibus rectangulis, quæ fiunt sub eadem AB, & partibus AE, EF, FB alterius lineæ AB; *quod operæpretium erat demonstrare.*

PROPOSITIO II.

THEOREMA II.

QUadratum lineæ quomodoquumque divisæ æquale est omnibus rectangulis, quæ fiunt sub tota, & singulis sectionis partibus.

Dico, quadratum lineæ AB (*fig.* 20. *tab.* 2.) divisæ pro libito in puncto E æquale esse duobus rectangulis AF, EC, quæ fiunt sub tota AB, & duabus

bus partibus AE, EB. Si igitur AB sit 6, pars AE 2, pars denique EB 4, evidens est quadratum 36 æquale esse duobus rectangulis 12, & 24 simul sumtis.

DEMONSTRATIO.

Ducta recta EF perpendiculari rectæ AB, manifestum est, rectangulum AF esse sub recta AB, vel AD ipsi æquali, & prima sectionis parte AE; rectangulum vero EC sub eadem AB, vel EF ipsi æquali, & altera sectionis parte EB. Quumque hæc duo rectangula congruant cum quadrato AC, jam sunt eidem æqualia (*per axi.* 8.) *quod ostendendum susceperamus*.

PROPOSITIO III.

THEOREMA III.

SI linea quæpiam in duas partes ad libitum dividatur, rectangulum, quod comprehenditur sub tota, & altera sectionis parte, æquale est quadrato ejusdem partis, & rectangulo sub utraque sectionis parte comprehenso.

Dico, rectangum sub linea AB (*fig.* 21. *tab.*2. divisa pro libito in puncto E, & altera sectionis parte AE, comprehensum, nimirum totum rectangulum AC, æquale esse quadrato ejusdem partis AE, scilicet AF, & simul rectangulo sub AE, EB, nempe rectangulo EC.

DE-

DEMONSTRATIO.

Ducta a puncto sectionis E perpendiculari EF, quæ sit æqualis parti AE, manifestum est rectangulum AF esse quadratum primæ sectionis partis AE, rectangulum EC esse sub duabus partibus AE, EB, rectangulum vero totum AC esse sub tota AB, & prima sectionis parte AE, (*per constr.*) Atqui quadratum AF, simul cum rectangulo EC, congruunt toti rectangulo AC; ergo sunt ipsi æqualia (*per ax.* 8.) *quod ostendendum susceperamus*.

PROPOSITIO IV.

THEOREMA IV.

Quadratum lineæ in puncto utquumque divisæ æquale est quadratis duarum sectionis partium, & simul duobus rectangulis sub iisdem partibus comprehensis.

Dico, quadratum DB lineæ AB (*fig.* 22. *tab.* 2.) divisæ utquumque in puncto E æquale esse duobus quadratis partium AE, EB, & simul duobus rectangulis sub iisdem partibus AE, EB comprehensis.

PRÆPARATIO.

Ducta diagonali AC, ducatur a puncto sectionis E recta EF perpendicularis rectæ AB, & per punctum intersectionis G ducatur linea HI parallela eidem AB; quæ una cum EF dividet quadratum AC in quatuor rectangula, scilicet in duo quadrata AG, GC, & in duo parallelogramma EI, HF, ut modo ostendemus.

DE-

DEMONSTRATIO.

Quoniam duo latera AB, BC trianguli ABC sunt æqualia (*per constr.*) duo anguli BAC, BCA sunt æquales (*per* 5. 1.) & uterque est dimidium anguli recti (*per* 32. 1.) ambo enim simul uni recto æquivalent. Eadem de caussa duo anguli DAC, DCA trianguli rectanguli ACD seorsum sumti sunt dimidium anguli recti. Ex quo sequitur, ob rectos angulos, qui facti sunt in punctis E, H, I, F (*per constr.*) angulos singulos AGE, AGH, CGF, CGI esse recti dimidios (*per* 32. 1.) proindeque inter se æquales; Quare duæ lineæ AE, GE sunt inter se æquales (*per* 6. 1.) ob duos angulos æquales EAG, EGA; non secus ac duæ AH, GH. Insuper duæ rectæ GI, IC sunt inter se æquales (*per* 6. 1.) ob angulum IGC æqualem angulo ICG, non minus, ac duæ FG, FC, ob angulum FGC æqualem angulo FCG.

Quoniam igitur latera opposita parallelogrammi sunt æqualia (*per* 34. 1.) manifestum est, rectangulum AG esse quadratum partis AE, rectangulum GC vero, quadratum partis EB, binos autem rectangulos EI, HF esse sub partibus EA, EB; & quoniam quatuor hæc rectangula congruunt cum quadrato AC, jam sunt ipsi æqualia (*per axi.* 8.) *quod erat ostendendum*.

COROLLARIUM I.

Diagonalis quadrati angulos oppositos, per quos transit, bifariam dividit; rectangula vero, per quæ transit, sunt quadrata.

CO-

COROLLARIUM II.

Datis duobus numeris quibusquumque, ex summa quadratorum eorumdem, & simul ex duplo producti ex eorum multiplicatione, exsurgit numerus quadratus. Sint duo numeri 3, & 5; summa duorum quadratorum 9, & 25, nimirum 34, una cum duplo 15, scilicet 30, efficit 64, qui numerus est quadratus, cujus radix est 8. Id aut totum ex hac propositione inducitur, ut patet.

PROPOSITIO V.

THEOREMA V.

SI linea aliqua secta sit in duas partes æquales, & simul in duas inæquales, rectangulum sub partibus inæqualibus, una cum quadrato partis intermediæ, æquale est quadrato, quod fit sub dimidia.

Dico, si linea AB (*fig.* 23. *tab.* 2.) divisa sit æqualiter in puncto C, & inæqualiter in puncto D, rectangulum sub partibus inæqualibus AD, DB una cum quadrato partis interceptæ CD æquale est quadrato dimidiæ CB, vel AC; videlicet CF.

PRÆPARATIO.

Ducta diagonali BE, ducatur à puncto D recta DG perpendicularis rectæ AB, & per punctum intersectionis I ducatur recta KL perpendicularis lineæ DG; quæ duæ perpendiculares divident quadratum in quatuor rectangula, quorum duo CI, FI sunt inter se æqua-

lia, reliqua vero duo DK, LG sunt quadrata, ut ex superiori demonstratione patet. Excitetur item a puncto A lineæ AB perpendicularis AH, quæ incidens in lineam KL productam in H, erit (*per* 34. 1.) æqualis lineæ BK, aut BD ipsi æquali, ex quo manifestum est, rectangulum AI esse sub partibus inæqualibus AD, DB comprehensum.

DEMONSTRATIO.

Quoniam duo rectangula AL, CK sub æqualibus lineis continentur, sunt inter se æqualia, non secus ac CI, FI; quæ ambo duobus præcedentibus addita, alterum alteri, ostendunt rectangulum AI sub partibus inæqualibus AD, DB comprehensum æquale esse gnomoni LBGI. Quoniam vero gnomon LBGI, una cum quadrato GL partis interceptæ CD, est æquale toti quadrato CF (*per axi.* 8.) evidens est, rectangulum sub partibus inæqualibus AD, DB, una cum quadrato partis interceptæ CD, æquale esse qudrato dimidiæ CB, videlicet CF (*per axi.* 1.) *quod operæpretium erat demonstrare.*

PROPOSITIO VI.

THEOREMA VI.

SI lineæ cuipiam bifariam divisæ recta quæquumque addatur, rectangulum, quod fit sub tota, & sub addita, una cum quadrato dimidiæ partis lineæ propositæ, æquale est quadrato alterius partis, una cum addita.

Dico, si linea AB (*fig.* 24. *tab* 2.) divisa sit bifariam in C, & ipsi addita sit recta BD, rectangulum

sub

ſub tota AD, una cum quadrato dimidiæ AC, vel CB, æquale eſſe quadrato lineæ CD, quæ conſtat ex dimidia parte CB, & addita BD, videlicet quadrato CE.

PRÆPARATIO.

Ducta diagonali DF, excitetur a puncto B recta BG perpendicularis rectæ AB, & per punctum ſectionis I ducatur recta KL perpendicularis lineæ BG; quocirca hæ duæ perpendiculares divident quadratum CE in quatuor rectangula, quorum duo BK, LG erunt quadrata (*per* 4.) cetera vero duo CI, IE erunt æqualia. Excitetur inſuper a puncto A recta AH perpendicularis rectæ AB, quæ occurrens rectæ KL productæ in H efficiet rectangulum AL æquale rectangulo CI, atque adeo rectangulo EI; quum hæc tria rectangula eandem habeant altitudinem nimirum additæ BD, & longitudinem dimidiæ AC.

DEMONSTRATIO.

Si utrique rectangulo æquali AL, EI addatur commune rectangulum CK, habebitur AK rectangulum æquale gnomoni LDGI. Quod ſi utrique harum æqualium magnitudinum adjungatur quadratum GL, manifeſtum eſt, rectangulum AK, una cum quadrato GL, nimirum rectangulum ſub duabus rectis AD, BD, una cum quadrato dimidiæ AC, vel CB, æquale eſſe gnomoni LDGI, & ſimul quadrato GL, atque adeo quadrato lineæ CD, videlicet EC; *quod erat oſtendendum*.

PROPOSITIO VII.

THEOREMA VII.

QUadratum lineæ, utquumque libuerit, divisæ in aliquo puncto, una cum quadrato unius sectionis partis, est æquale duobus rectangulis sub tota, & eadem sectionis parte comprehensis, & simul quadrato alterius partis.

Dico, quadratum lineæ AB (*fig.* 25. *tab.* 2.) divisæ pro libito in puncto C, una cum quadrato partis AC, æqualæ esse duobus rectangulis sub tota AB, & eadem parte AC comprehensis, & simul quadrato alterius partis CB.

PRÆPARATIO.

Ducta diagonali BE, producatur latus CL quadrati AL in F, & per punctum sectionis G ducatur HI ipsi CF perpendicularis; quæ duæ rectæ divident (*per* 4.) quadratum AD in quatuor rectangula, quorum duo CI, HF erunt quadrata, reliqua vero AG, GD inter se æqualia.

DEMONSTRATIO.

Si duobus rectangulis æqualibus AG, GD addantur duo quadrata AL, HF, quæ sunt æqualia, sunt enim ambo quadrata partis AC, fient duo rectangula æqualia HL, HD, quorum utrumque comprehenditur sub tota AB, & parte AC. Ex quo sequitur, summam horum rectangulorum, nempe figuram

LEIG,

LEIG, æqualem esse duobus rectangulis sub AB AC, comprehensis; quare si utrique ex his magnitudinibus adjungas quadratum alterius partis CB, scilicet CI, manifestum est, duo rectangula sub tota AB, & parte AC, una cum quadrato alterius partis CB, æqualia esse quadrato lineæ AB, nempe AD, simul cum quadrato partis AC, videlicet AL; *quod operæpretium erat demonstrare.*

PROPOSITIO VIII.

THEOREMA VIII.

SI lineæ in puncto utquumque divisæ addatur linea alteri sectionis parti æqualis, quadratum totius æquale est quatuor rectangulis *sub* eadem lineæ proposita, & addita comprehensis, simul cum quardrato alterius partis.

Dico, si linea AB (*fig.* 26. *tab.* 2.) divisa sit pro libito in puncto C, atque ipsi adjungatur linea BD æqualis alteri sectionis parti, v. g. CB, quadratum totius AD esse æquale quatuor rectangulis sub linea proposita AB, & addita BD, comprehensis, & simul quadrato alterius partis AC.

PRÆPARATIO.

Ducta diagonali DF, excitentur a duobus punctis B, & C duæ rectæ BG, CH lineæ AB perpendiculares; ac per puncta intersectionum I, & K ducantur duæ rectæ NO, IM eidem AB parallelæ. Igitur quadratum AE divisum erit in plura rectangula, quorum sex, scilicet LH, CM, QP, KM, CK, BO,

erunt

erunt quadrata, (*per* 4.) quatuor vero postrema, quæ continentur in quadrato CM, erunt æqualia, sunt enim quadrata duarum linearum æqualium CB, BD, (*ex hyp.*)

DEMONSTRATIO.

Tria rectangula AK, NP, GO sunt inter se æqualia, habent enim longitudinem lineæ AB, altitudinem vero BD (*per constr.*) & rectangulum GI, una cum quadrato BO, constituit pariter rectangulum tribus prioribus æquale, nam BO est æquale quadrato PQ (*per constr.*) quod additum rectangulo GI efficit rectangulum GQ æquale rectangulo GO. Igitur in quadrato AE inveniuntur quatuor rectangula sub linea AB, & parte BD, vel BC, & simul quadratum alterius partis AC, videlicet LH, quæ omnia simul eidem quadrato AE æqualia sunt (*per ax.* 8.) *quod ostendendum susceperamus.*

COROLLARIUM. I.

Si producto duorum numerorum inæqualium quorumquumque quater sumto, addas quadratum differentiæ, seu excessus, quo unus alium superat eorum summa erit numerus quadratus. Ex. g. si sumatur quater 21, quod est productum duorum numerorum 3, & 7, nempe 84, ipsique adjungatur quadratum 4 (quæ est differentia duorum numerorum 3, & 7) nimirum 16, summa 100. erit numerus quadratus, cujus radix est 10, qui numerus est æqualis summæ 7, & 3. Id autem ex hac propositione deducitur.

COROLLARIUM II.

Quadratum, cujus latus est duplum lateris alterius quadrati, est ejusdem quadruplum. Sic quadratum

tum CM est quadruplum quadrati BO, quoniam latus CD est duplum lateris BD, id quod generalius ostendemus Prop. XVII lib. VI.

PROPOSITIO IX.

THEOREMA IX.

Si recta linea secetur æqualiter simul, & inæqualiter, quadrata duarum partium inæqualium sunt simul dupla quadrati dimidiæ, una cum quadrato partis intra utrumque sectionis punctum interceptæ.

Dico, si recta AB (*fig.* 27. *tab.* 2.) secta sit bifariam in C, & in duas partes inæquales AD, DB, duo quadrata AD, DB, esse simul dupla duorum quadratorum AC, CD.

PRÆPARATIO.

Excitetur a puncto C medio recta CE perpendicularis lineæ AB, & æqualis dimidiæ AC, vel CB, junganturque rectæ EA, EB. Ducatur item a puncto D recta DF parallela rectæ CE, & a puncto F recta FG parallela rectæ AB, ut habeatur parallelogrammum CDFG, cujus latera CD, FG, erunt inter se æqualia (*per* 34. 1.) Denique jungatur recta AF.

DEMONSTRATIO.

Manifestum est, quemlibet angulum acutum duorum triangulorum rectangulorum isoscelium ACE, BCE esse dimidium recti (*per* 5. & 32. 1.) quare totus angulus AEB rectus erit. Insuper manifestum est, singulos an-

angulos acutos duorum triangulorum rectangulorum, EGF, BDF esse anguli recti dimidios (*per* 32. 1.); & proinde angulum GFE æqualem esse angulo GEF, qui est recti dimidius, & angulum DFB æqualem angulo B, qui item est dimidium recti, ut vidimus. Itaque duo triangula GEF, BDF erunt isoscelia (*per* 6. 1.) Quare quadratum AC erit dimidium quadrati AE (*per* 47. 1.) & quadratum GF dimidium quadrati EF.

Summa igitur quadratorum AD, DF, vel DB, est æqualis summæ duorum quadratorum AE, EF (*per axi.* 1.) utraque enim summa est æqualis (*per* 47. 1.) quadrato hypotenusæ AF, quæ communis est duobus triangulis rectangulis AFD, AFE. Atqui summa duorum quadratorum AE, EF dupla est summæ duorum quadratorum AC, GF, vel CD ipsi æqualis, ut modo ostensum est; quadratum enim AE est duplum quadrati AC, quadratum vero EF duplum quadrati FG (*per* 47. 1.) ergo summa duorum quadratorum AD, DB est duplo major summa duorum quadratorum AC, CD; *quod ostendendum susceperamus.*

PROPOSITIO X.

THEOREMA X.

SI rectæ lineæ bifariam divisæ alia recta addatur, quadratum totius lineæ, una cum quadrato additæ, sunt duplo majora quadrato dimidiæ partis lineæ propositæ, & simul quadrato lineæ ex dimidia, & addita conflatæ.

Dico, si lineæ AB (*fig.* 28. *tab.* 2.) bifariam divisæ in C addatur recta quæcumque BD, quadratum totius lineæ AD, una cum quadrato BD, sunt simul

mul duplicia summæ duorum quadratorum AC, CD.

PRÆPARATIO.

Excitetur a puncto C recta CE perpendicularis AB, & æqualis dimidiæ AC, junganturque rectæ EA, EB. Tum a puncto D ducatur recta DF parallela lineæ CE, & a puncto E linea EF parallela lineæ CD, ut habeatur parallelogrammum CDFE, cujus duo latera opposita CD, EF erunt æqualia (*per* 34. 1.) Denique producantur duæ rectæ EB, FD, quoad sibi occurrant in G, jungaturque recta AG.

DEMONSTRATIO.

Manifestum est, ut in superiori demonstratione, angulum AEG rectum esse, & insuper duo triangula rectangula GDB, GFE esse isoscelia adeoque lineam DG æqualem esse lineæ DB, lineam vero FG æqualem lineæ FE, & proinde lineæ CD.

Quadratum igitur AE erit duplum quadrati AC (*per* 47. 1.) Et quadratum EG duplum quadrati EF, vel CD. Ex quo sequitur, summam duorum quadratorum AE, EG, seu (*per* 47. 1.) solum quadratum AG; sive etiam (*per* 47. 1.) quadrata duarum linearum AD, DG, vel BD, esse simul duplicia duorum quadratorum AC, EF, vel CD; *quod ostendendum susceperamus*.



PROPOSITIO XI.

PROBLEMA I.

DAtam rectam lineam ita dividere, ut quod sub tota, & altero segmento comprehenditur, rectangulum, æquale sit quadrato alterius partis.

Ut dividatur linea AB (*fig.* 29. *tab.* 2.) in puncto C, ita ut rectangulum, quod sit sub tota AB, & altera parte CB, æquale sit quadrato alterius partis AC, describatur super rectam AB quadratum ABED, divisoque latere AD bifariam in E, ducatur recta EB; & producatur DA in F, itaut EF æqualis sit EB, ut habeatur linea AF, super quam si describatur quadratum AFGC, id dabit punctum C, quod inquiritur; si enim producatur GC in H, rectangulum BH, quod sit sub BE, vel AB, & parte CB, æquale erit quadrato alterius partis AC.

DEMONSTRATIO.

Quoniam linea AD divisa est bifariam in puncto E, & ipsi addita est recta AF, rectangulum sub tota DF, & addita AF, videlicet DG, una cum quadrato dimidiæ AE, æquale est (*per* 6.) quadrato EF, vel EB; nimirum (*per* 47. 1.) duobus quadratis AE, AB simul sumtis. Quare si ab utraque summa auferatur commune quadratum AE, remanebit rectangulum DG æquale quadrato lineæ AB, scilicet AE. Quod si ab utroque item ex his planis auferatur commune rectangulum DC, reliquum quadratum AG æquale erit reliquo rectangulo CE (*per axi.* 3.) *quod faciendum, & demonstrandum susceperamus.*

PROPOSITIO XII.

THEOREMA XI.

In amblygoniis triangulis quadratum lateris obtuso angulo subtensi æquale est duobus quadratis aliorum laterum, & duobus rectangulis æqualibus, quorum utrumque comprehenditur sub altero latere obtusum angulum continente producto, donec occurrat perpendiculari ab angulo sibi opposito ductæ, & parte ejusdem lateris inter angulum obtusum, & perpendicularem intercepta.

Dico, in triangulo ambligonio ABC (*fig.* 30. *tab.* 2.) quadratum lateris AC angulo obtuso B subtensi æquale esse summæ quadratorum duorum laterum AB, BC tum duobus rectangulis, quæ fiunt sub latere AB, & parte BD ejusdem lateris producti in D, ubi occurrit perpendiculari CD ductæ ab angulo C sibi opposito.

PRÆPARATIO.

Producto latere AB, ducatur a puncto C recta CD eidem perpendicularis, quæ dabit partem BD.

DEMONSTRATIO.

Quoniam (*per* 4.) quadratum AD æquale est duobus quadratis AB, BD simul sumtis, una cum duobus rectangulis sub AB, BD comprehensis, si duabus hisce magnitudinibus addatur quadratum CD, manifestum est, summam duorum quadratorum AD, CD, seu (*per* 47. 1.) solum quadratum AC esse æquale tum quadrato AB, tum summæ duorum quadratorum BD, CD, videlicet (*per* 47. 1.) quadrato CB, una

 cum

cum duobus rectangulis sub AB, BD, *quod erat ostendendum*.

PROPOSITIO XIII.

THEOREMA XII.

IN omni triangulo rectilineo quadratum lateris angulo acuto oppositi, una cum duobus rectangulis sub alio latere, in quod incidit perpendicularis ab angulo ipsi opposito ducta, & ea lateris parte, quæ perpendicularem inter, & angulum acutum interjacet, comprehensis, æquale est summæ quadratorum aliorum laterum.

Dico, in triangolo ABC (*fig.* 31: *tab.* 2.) quadratum lateris AC, quod opponitur angulo acuto B una cum duobus rectangulis sub latere AB, quod alteri angulo ACB opponitur, & parte DB, quæ inter perpendicularem CD, & acutum angulum B, interjacet, comprehensis, æquale esse summæ quadratorum aliorum laterum AB, BC.

DEMONSTRATIO.

Quoniam summa duorum quadratorum AB, BD æqualis est quadrato AD, & duobus rectangulis sub AB, BD comprehensis (*per* 7.) si utrique summæ addatur quadratum perpendicularis CD, manifestum est, quadratum AB, una cum duobus quadratis CD, BD, sive (*per* 47. 1.) una cum quadrato CB, æquale esse duobus quadratis AD, CD, sive (*per* 47. 1.) quadrato AC, & duobus rectangulis sub AB, DB. Ex quo concluditur, quadratum lateris AC, una cum duobus

bus rectangulis sub tota AB, & parte BD comprehensis, æquale esse duobus quadratis laterum AB, BC; *quod demonstrandum susceperamus*.

SCHOLIUM.

Ut magis perspicua sit demonstratio, describatur super latus AB quadratum AE, ductaque diagonali BF, producatur perpendicularis CD in K, & per punctum H ducatur recta GI ipsi DK perpendicularis.

Manifestum est igitur, quadratum lineæ AB, nimirum AE, una cum quadrato partis DB, scilicet BH, æquale esse (*per* 7.) quadrato alterius partis AD, videlicet GK, & duobus rectangulis sub AB, DB comprehensis, nimirum AI, BK. Quod si utrique summæ æquali addatur quadratum perpendicularis CD, jam quadratum AB, cum duobus quadratis CD, DB, seu cum solo quadrato CB, est æquale duobus quadratis AD, CD, seu soli quadrato AC, una cum duobus rectangulis AI, BK, sub AB, DB comprensis; *quod demonstrare oportebat*.

PROPOSITIO XIV.

PROBLEMA II.

Dato rectilineo æquale quadratum describere.

Ut describatur quadratum æquale rectilineo I dato (*fig.* 32. *tab.* 2.) parallelogrammum rectangulum ipsi æquale prius describi oportet (*per* 45. 1.) Sit igitur rectangulum sub AB, BE, æquale rectilineo I; ut ipsi æquale constituatur quadratum, dividatur tota AE bifariam in C, tum a puncto C, intervallo vero CA de-

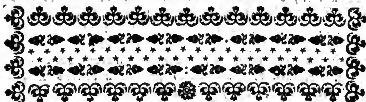
describatur semicirculus ADE; denique a puncto B excitetur perpendicularis BD, quæ erit latus quadrati æqualis rectangulo sub AB, BE.

DEMONSTRATIO.

Quoniam recta BE divisa est bifariam in C, & inæqualiter in B, rectangulum sub partibus inæqualibus AB, BE, una cum quadrato partis interceptæ CB, æquale est (*per* 5.) quadrato dimidiæ CA, vel CD, sive (*per* 47. 1.) duobus quadratis CB, BD; quare si ab utraque summa æquali auferas commune quadratum CB, remanebit quadratum BD æquale rectangulo sub AB, BE comprehenso; *quod facere, & ostendere oportebat*.

Finis Libri Secundi.





LIBER TERTIUS.



Igurae planae omnium perfectissimae, circuli nempe, naturam, & proprietates in hoc Libro explicat Euclides, tum ex lineis, quae vel intra circulum, vel extra ad ejus superficiem a quovis puncto duci possunt; tum ex diversis, qui in circulo constitui possunt, angulis, tum denique ex mutuo, sive rectae lineae, sive unius circuli cum alterius circumferentia, contactu. Hinc erui possunt regulae pro instrumentis, quibus mechanica utitur, conficiendis, iis praesertim, quae Astronomiae, & Opticae inservire solent, pro quibus circulorum notitia est imprimis necessaria.

DEFINITIONES.

I. **C** *Irculi aequales* sunt, quorum diametri, vel semidiametri sunt aequales.

II. *Recta circulum tangere* dicitur, quae in circulum sic incidit, ut producta ipsum non secet; *ut AB* (fig. 18. tab. 3.)

III. *Circuli sese tangentes* dicuntur, qui sibi occurrentes non sese intersecant. *Dupliciter autem duo circuli sese tangere possunt; nimirum, vel quum alter extra alterum positus est; ut duo ABC, DBE* (fig.

11. tab.

11. tab. 3.) *vel quum alter intra alterum jacet; ut ABE, ADC* (fig. 6. tab. 3.)

IV. *Duæ rectæ lineæ æqualiter a centro distare* dicuntur, quum perpendiculares a circuli centro ad eas ductæ sunt æquales. *Hinc duæ lineæ AB, CD* (fig. 14. tab. 3.) *æqualiter distant a centro E, si duæ rectæ EF, EG sint æquales*.

V. *Segmentum circuli* est pars circuli a recta circulum secante, & circumferentiæ parte circumscripta; *ut ADB, vel AEB* (fig. 1. tab. 3.) *Si secans sit diameter circuli, ut CD* (fig. 3. tab. 3.) *duo circuli segmenta erunt æqualia, eaque semicirculi vocari solent*.

VI. *Angulus segmenti* est mixtus angulus, qui sub recta circulum secante, & ipsa circuli circumferentia continetur; *ut ABE, vel ABD* (fig. 1. tab. 3.)

VII. *Angulus in segmento*, seu in circuli sectione, est angulus sub duabus rectis a quovis puncto arcus ad duo extrema lineæ circulum secantis ductis, comprehensus. *Manifestum est, angulum D* (fig. 23. tab. 3.) *esse in segmento ADB, quoniam duæ lineæ DA, DB, quibus continetur, a puncto D ad duo extrema A, & B secantis AB ductæ sunt. Hic angulus dicitur etiam* arcui insistens, *seu* arcui innixus.

VIII. *Similia circuli segmenta* sunt, quæ æquales angulos suscipiunt.

IX. *Sector circuli* est portio circuli a duobus semidiametris, non in directum jacentibus, & intercepta ab iis circumferentia, circumscripta. *Sic portio circuli ADBFA, vel ACBFA* (fig. 3. tab. 3.) *sector circuli nominatur*.

X. *Quadrilaterum circulo inscriptum* dicitur, cujus anguli omnes circuli peripheriam tangunt, *ut ABCD* (*fig.* 25. tab. 3.)

PRO-

PROPOSITIO I.

PROBLEMA I.

DAti circuli centrum invenire.

Ducatur recta quæquumque AB (*fig. 1. tab. 3.*) eaque secetur bifariam in C; tum per punctum C ducatur recta DE perpendicularis eidem AB; denique secetur item bifariam recta DE in puncto F, quod erit centrum, quod inquiritur. Id autem ut ostendatur, demonstrandum est, centrum circuli necessario ponendum esse in perpendiculari DE.

PRÆPARATIO.

In hypothesi, quod circuli AEBD centrum non sit in perpendiculari DE, statuatur esse in quolibet puncto extra ipsam, videlicet in G, a quo ducantur ad puncta A, B, C tres rectæ GA, GB, GC.

DEMONSTRATIO.

Quoniam duo triangula GAC, GBC habent latus AG æquale lateri GB (*per axi. 13.*) AC vero æquale CB (*per constr.*) GC denique est utrique commune, ea sunt æqualia (*per* 8. 1.) proindeque angulus GCA æqualis erit angulo GCB, atque adeo ambo recti (*per* 13. 1.) Ex quo sequitur, lineam GC debere cum perpendiculari DE convenire (*per def.* 10. 1.) *quod facere, & demonstrare opus erat.*

COROLLARIUM.

Hinc manifestum est, centrum circuli esse in linea aliam rectam in circulo existentem bifariam, & ad rectos angulos dividente.

PROPOSITIO II.

THEOREMA I.

Si sumantur duo puncta in circuli peripheria, per ea ducta recta linea necessario, est intra circulum.

Dico, si per puncta A, & B (*fig.* 2. *tab.* 3.) ducatur recta AB, hanc esse totam intra circulum.

PRÆPARATIO.

Ducantur à centro C, quod jam cognitum esse ponimus (*per* 1.) duo radii CA, CB; tum etiam ad punctum D ad libitum sumtum super recta AB ducatur recta CD; quod punctum necessario erit intra circulum.

DEMONSTRATIO.

Manifestum est, in triangulo isoscelio CAB duos angulos A, & B esse æquales (*per* 5. 1.) Quoniam autem angulus CDB externus est comparate ad triangulum ACD, est major (*per* 16. 1.) interiore opposito A, vel B ipsi æquali. Ergo latus CB (*per* 19. 1.) majus est latere CD, proindeque punctum D proprius erit centro, quam A, vel B; ex quo infertur, illud esse intra circulum; *quod erat ostendendum*.

PROPOSITIO III.

THEOREMA II.

SI diameter rectam in circulo existentem, non per centrum ductam, bifariam dividat, divisio erit ad angulos rectos. Si vero dividat ad angulos rectos eam bifariam dividet.

Dico, 1. si diameter CD (*fig. 3. tab. 3.*) dividat bifariam rectam AB, duos angulos CEA, CEB esse rectos.

DEMONSTRATIO.

Ductis radiis FA, FB, manifestum est (*per* 8. 1.) duo triangula FAE, FBE esse æqualia, ob æquales radios FA, FB; ob latus AE æquale lateri EB (*ex hyp.*) & ob latus FE commune. Ergo etiam duo anguli FEA, FEB erunt æquales, & proinde recti (*per* 13. 1.) *quod primum ostendere debebamus*.

Dico 2. si anguli FEA, FEB recti sint, lineam AB esse bifariam divisam.

DEMONSTRATIO.

Quoniam angulus A æqualis est angulo B (*per* 5. 1.) angulus vero FEA æqualis angulo FEB (*ex hyp.*) & latus FE commune; duo triangula FAE, FBE sunt æqualia (*per* 26. 1.) & proinde duæ rectæ AE, EB æquales; *quod ostendendum supererat*.

Conversa hujus propositionis æque vera est: nimirum, si divisio non sit ad angulos rectos, linea non erit bifariam divisa.

PROPOSITIO IV.

THEOREMA III.

SI in circulo binæ rectæ extra centrum sese interfecent, se bifariam mutuo minime fecabunt.

Dico, duas rectas AB, CD (*fig.* 4. *tab.* 3.) extra centrum F ductas sese bifariam mutuo minime interfecare; quocirca quamvis altera AB fecetur bifariam in E, altera tamen CD bifariam non fecabitur.

DEMONSTRATIO.

Quoniam linea AB bifariam fecta est in E (*ex hyp.*) si ducatur per punctum E, & per centrum F diameter GH angulus FEB rectus erit (*per* 3.) quare angulus FED non erit rectus, proindeque (*per* 3.) duæ partes CE, ED non erunt æquales; *quod demonstrandum susceperamus*.

PROPOSITIO V.

THEOREMA IV.

SI bini circuli sese invicem fecuerint, eorum non erit idem centrum.

Dico, duos circulos ACB, ADB (*fig.* 5. *tab.* 3.) sese interfecantes in punctis A, & B, non habere idem centrum.

DE-

DEMONSTRATIO.

Si duo centra F, & E simul concurrerent in puncto v.g. E, utraque linea EC, ED esset æqualis eidem lineæ AE (*per axi.* 13.) adeoque inter se; atqui hoc absurdum est (*per axi.* 9.) ergo E, & F non conveniunt in eodem puncto; *quod erat ostendendum.*

Propositio VI, qua dicitur, duorum circulorum sese tangentium, ut ABE, ADC (fig. 6. tab. 3.) *non esse idem centrum, eadem ratione demonstratur; alias enim duæ rectæ FB, FD essent eidem AF æquales, proindeque etiam inter se, quod absurdum est. His duabus propositionibus innituntur, quæ de circulis excentricis explicantur in Astronomia; excentrici enim dicuntur ii circuli, quorum non est idem centrum.*

PROPOSITIO VII.

THEOREMA VI.

SI a puncto in circuli diametro sumto, quod non sit centrum circuli, plures ducantur ad circumferentiam lineæ, omnium maxima erit ea diametri pars, in qua est centrum circuli; minima vero reliquum ejusdem diametri. Ex aliis porro ea, quæ propius ad centrum accedit, major est ea, quæ magis a centro recedit. Binæ denique duntaxat rectæ lineæ æquales, non ad easdem partes, ab eodem puncto ad circuli peripheriam duci possunt.

Dico 1. in circulo AFBG (*fig.* 7. *tab.* 3.) maximam linearum, quæ a puncto C duci possunt ad circuli

culi

culi peripheriam, esse partem diametri CB, quæ idcirco major erit recta CE.

DEMONSTRATIO.

Quoniam trianguli CDE duo latera CD, DE simul sumta sunt majora tertio CE (*per* 20. 1.) & insuper sunt æqualia simul lineæ CB, ob radium DE æqualem radio DB, recta CB erit major recta CE; *quod primum erat ostendendum*.

Eodem modo demonstrari potest, lineam CB majorem esse qualibet alia linea, v. g. CF, vel CG.

Dico 2. reliquum diametri CA esse omnium linearum, quæ a puncto C duci possunt, minimam.

DEMONSTRATIO.

Ducto radio DF, manifestum est, ut in superiori demonstratione, duo latera CD, CF trianguli CDF esse majora tertio DF, seu DA ipsi æquali; quare si utrinque auferatur communis pars CD, reliqua CA minor erit reliqua CF; *quod 2 loco erat ostendendum*.

Dico 3. lineam CE, quæ propius accedit ad centrum D, majorem esse linea CF, quæ est remotior.

DEMONSTRATIO.

Quoniam duo latera CD, DE trianguli CDE æqualia sunt duobus lateribus CD, DF trianguli CDF, at angulus comprehensus CDE major est angulo comprehenso CDF, basis etiam CE major est (*per* 24. 1.) basi CF; *quod* 3. *loco erat ostendendum*.

Dico 4. ab eodem puncto C nonnisi duas lineas æquales, non ad easdem partes, duci posse ad peripheriam circuli; hinc duæ rectæ duntaxat CF, CG

erunt

erunt æquales, ideoque duo anguli CDF, CDG sint æquales.

DEMONSTRATIO.

Quoniam duo latera CD, DF trianguli CDF æqualia sunt duobus lateribus CD, DG trianguli CDG, & angulus comprehensus CDF æqualis est angulo comprehenso CDG, etiam bases CF, CG sunt æquales (*per 4. 1.*) Et quoniam lineæ omnes, quæ ad utramque partem a puncto C, præter illas duas, duci possunt, necessario sunt propiores, vel remotiores comparate ad lineam CB, in qua est centrum, proindeque vel majores, vel minores, quam CF, CG, manifestum est, a puncto C nonnisi duas rectas CG, CF æquales, non quidem ad easdem partes, duci posse ad circumferentiam circuli; *quod ostendendum superérat.*

PROPOSITIO VIII.

THEOREMA VII.

SI a puncto aliquo extra circulum sumto ducantur plures rectæ ad circumferentiam circuli concavam desinentes, omnium maxima est, quæ per centrum transit; quæque huic propior est, major est remotiore. Ex iis porro, quæ in circumferentiam convexam cadunt, ea linea, quæ producta transit per centrum, est omnium minima; quæque huic propior est, minor est remotiore. Denique ab eodem puncto nequeunt plures, quam binæ rectæ æquales, non quidem ad eas-

easdem partes, sive ad circumferentiam concavam, sive ad convexam duci.

Nomine circumferentiæ concavæ interiorem intelligimus, quæ centrum scilicet respicit; nomine vero convexæ exteriorem.

Dico 1. lineam CB (*fig.* 8. *tab.* 3.) quæ per centrum D transit, esse maximam omnium linearum, quæ a puncto C extra circulum posito ad circumferentiam concavam duci possunt; proindeque majorem esse linea CE.

DEMONSTRATIO.

Ducto radio DE, evidens est, duo latera CD, DE trianguli CDE esse simul majora tertio latere CE (*per* 20. 1.) quumque ambo sint æqualia rectæ CB, ob radium DE æqualem radio DB, sequitur, rectam CB majorem esse recta CE; *quod primum erat ostendendum*.

Eadem ratione ostendi potest, lineam CB majorem esse qualibet alia linea, puta CG, vel CF.

Dico 2. lineam CE, quæ propius jacet ad lineam CB, majorem esse linea CF, quæ est remotior.

DEMONSTRATIO.

Ducto radio DF, manifestum est, duo latera CD, DE trianguli CDE, æqualia esse duobus lateribus CD, DF trianguli CDF. At quoniam angulus comprehensus CDE major est angulo comprehenso CDF, basis CE major est (*per* 24. 1.) basi CF; *quod secundo loco erat demonstrandum*.

Dico 3. lineam CA, quæ producta transit per centrum D, minimam esse omnium, quæ a puncto C ad convexam circuli circumferentiam duci possunt, v. g. minorem esse linea CI.

DE.

DEMONSTRATIO.

Ducto radio DI, manifestum est, in triangulo CID duo latera CI, ID esse simul majora tertio latere CD (*per* 20. 1.) Ergo si ab hisce inæqualibus magnitudinibus auferantur duo radii æquales DA, DI, reliqua CI major erit reliqua CA; *quod 3 erat ostendendum.*

Dico 4. lineam CI, quæ proximior est rectæ CA, minorem esse recta CH, quæ remotior est.

DEMONSTRATIO.

Ducto radio DH, manifestum est (*per* 21. 1.) duo latera CI, ID trianguli CID simul minora esse duobus lateribus CH, HD trianguli CHD. Ergo sublatis utrinque duobus æqualibus radiis DI, DH, reliqua CH major erit reliqua CI; *quod 4 erat ostendendum.*

Dico 5. ab eodem puncto C non posse duci plures, quam binas rectas æquales ad circumferentiam circuli concavam, non quidem ad easdem partes; nimirum binas CE, CG.

DEMONSTRATIO.

Positis ex utraque parte æqualibus angulis CDE, CDG, manifestum est, duo triangula CDE, CDG esse æqualia (*per* 4. 1.) quamobrem etiam bases CE, CG æquales erunt. Quumque lineæ omnes, quæ a puncto C ad circumferentiam concavam duci possunt, sint vel propiores, vel remotiores comparate ad rectam CB, atque adeo, vel majores, vel minores, quam CE, vel CG, evidens est, nonnisi duas rectas æquales, non quidem ad easdem partes, ad circumferentiam concavam duci posse; *quod 5 erat ostendendum.*

Dico 6. a puncto C non posse plures, quam duas rectas æquales, duci ad circumferentiam circuli convexam, nimirum CI, CK, posito, quod duo anguli CDI, CDK facti sint æquales.

DEMONSTRATIO.

Quoniam duo latera CD, DI trianguli CDI æqualia sunt duobus lateribus CD, DK trianguli CDK, & angulus comprehensus CDI æqualis est angulo comprehenso CDK (*ex hyp.*) duæ bases CI, CK sunt pariter æquales (*per 4. 1.*). Cumque nulla alia recta duci possit a puncto C ad circumferentiam circuli convexam, quæ non sit vel propior, vel remotior comparate ad rectam CD, proindeque minor, vel major, quam CI, vel CK, evidens est, non posse a puncto C plures, quam duas rectas æquales, non ad easdem partes, duci ad circumferentiam circuli convexam pertingentes; *quod reliquum erat ostendere.*

COROLLARIUM.

Hinc sequitur, maximam linearum, quæ a puncto C duci possunt ad circumferentiam circuli convexam, eam esse, quæ producta circulum non secat; cujusmodi est tangens CL.

Quæ de æstus maris reciproci caussa excogitarunt recentiores Philosophi hac propositione aliquo modo nituntur. Idcirco enim in novilunius, & pleniluniis æquinoctialibus maris æstum altiorem esse autumant, quod tum temporis Luna cum Sole conjungatur in ipso æquatore, subjectasque aquas premat secundum rectas lineas, quæ per terræ centrum transeunt, quæ lineæ necessario sunt reliquis breviores; ex quo fit, ut Luna in eo loco non modo directius, sed etiam propius aquas maris comprimat; Ope

Ope etiam hujus propositionis ostenditur in Optica, axem opticum esse brevissimum omnium radiorum, qui ab objecto in oculum immittuntur.

PROPOSITIO IX.

THEOREMA VIII.

Punctum, a quo plures, quam binæ rectæ lineæ, ad circuli circumferentiam duci possunt, est circuli centrum.

Hæc propositio est corollarium Propositionis VII; a puncto enim, quod non sit circuli centrum, non possunt duci plures, quam duæ rectæ æquales ad circuli circumferentiam.

PROPOSITIO X.

THEOREMA IX.

Bini circuli, sese intersecantes, nonnisi in duobus punctis sese intersecare possunt.

Hæc item propositio, ut Corollarium Propositionis VII spectari potest. Siquidem si duo circuli in tribus punctis sese intersecarent, a puncto, quod non esset centrum circuli, videlicet a puncto E (*fig.* 9. *tab.* 3.) quod nequit esse utrique circulo ADB, ACB commune (*per* 5.) possent duci tres rectæ lineæ æquales ad circuli peripheriam, nimirum ad tria intersectionis puncta, quod absurdum est.

PROPOSITIO XI.

THEOREMA X.

Si bini circuli introrsum sese tangant, recta per eorum centra ducta, si producatur, per punctum contactus transibit.

Dico, si duo circuli ABC exterior (*fig. 10. tab. 3.*) & ADE interior sese tangant in puncto A, rectam FG, quæ ducitur per centra F, & G, si producatur, per punctum contactus A transire debere; id autem ut ostendatur, demonstrandum est, duas rectas AG, GF unicam rectam constituere.

PRÆPARATIO.

In hypothesi, quod duæ rectæ AG, GF non sint in directum constitutæ, sive, quod idem est, sibi mutuo sint inclinatæ, jungantur duo puncta A, & F, & fiat triangulum AGF per lineam AHF, quæ recta concipienda est, quæ a centro F circuli exterioris ABC ducta ad punctum contactus A pertinget, quin transeat per centrum G circuli interioris ADE. Denique producatur recta FG in directum in B, itaut linea FGDB recta concipiatur, quæ erit major duabus rectis AG, GF ob radium AG æqualem radio DG.

DEMONSTRATIO.

Duæ rectæ lineæ BDGF, AHF sunt inter se æquales (*per axi.* 13.) sunt enim duo radii ejusdem circuli ABC. Atqui recta BDGF major est duabus rectis AG, GF; ergo recta AHF est item major duabus rectis AG, GF. In triangulo igitur A GF duo latera AG, GF sunt simul minora tertio late-

latere AHF. Atqui hoc absurdum est (*per* 20. 1.) Ergo recta AHF congruere debet cum duabus AG, GF, quæ idcirco erunt in directum constitutæ; *quod demonstrandum susceperamus*.

PROPOSITIO XII.

THEOREMA XI.

SI duo circuli sese mutuo exterius tangant, ad eorum centra applicata recta linea, per contactum transibit.

Dico, si duo circuli ABC, DBE (*fig.* 11. *tab.*3.) sese exterius tangant in B, rectam FG, quæ eorum centra conjungit, per punctum contactus transire. Ostendendum est igitur, duas rectas FB, BG, quæ a centris F, & G ad punctum contactus B ductæ sunt, esse in directum constitutas.

PRÆPARATIO.

In hypothesi, quod duæ rectæ FB, BG sint sibi mutuo inclinatæ, jungatur linea FCEG (quæ recta concipienda est) quæ in eo casu triangulum FBG constituet.

DEMONSTRATIO.

Manifestum est, lineam FCEG, majorem esse duabus rectis FB, BG simul sumtis parte CE; siquidem recta FC æqualis est rectæ FB, recta vero GE æqualis rectæ GB (*per axi.* 13.) In triangulo igitur FBG duo latera FB, BG sunt simul minora tertio latere. Atqui id absurdum est (*per* 20. 1.) Ergo duæ rectæ FB, BG angulum minime efficiunt, proindeque

que in directum sunt constitutæ; *quod ostendere operæpretium erat.*

Hac propositione utuntur Physico-mathematici, ut ostendant, communicationem motus duorum corporum, sive directe, sive oblique in sese mutuo incurrentium, fieri secundum lineam centra globulorum connectentem; cujus theorematis beneficio plura problemata resolvuntur, quæ maximi sunt usus in Statica, & in Nautica. Vide Bernullium De gravitate ætheris.

PROPOSITIO XIII.

THEOREMA XII.

Circulus circulum tangit in uno duntaxat puncto, sive introrsum, sive extrorsum tangat.

Dico 1. Circulum ABD (*fig.* 12. *tab.* 3.) tangere circulum ABC intra ipsum existentem duntaxat in puncto A.

PRÆPARATIO.

Jungantur duo centra E, F per rectam EF, quæ producta per punctum contactus A transibit (*per* 11.) In hypotesi autem, quod duo circuli propositi in alio puncto, præter A, sese contingant, puta in B, ducantur a duobus centris E, & F ad punctum B duæ rectæ BE, BF.

DEMONSTRATIO.

Manifestum est (*per* 20. 1.) in triangulo BEF duo latera EB, EF, esse simul majora tertio BF. Atqui duæ lineæ EB, EF sunt simul æquales rectæ FA (*per axi.*

axi. 13.) ob duos radios FA, EB circuli ABC, & partem EF communem. Ergo recta FA major erit recta FB. Atqui id absurdum est (*per axi.* 13.) scilicet FA, FB sunt duo radii circuli ABD; ergo duo circuli propositi in puncto B minime sese contingunt; *quod primum ostendere oportebat*.

Dico 2. duos circulos ABC, ABD (*fig.* 13. *tab.* 3.) exterius sese contingere in puncto A duntaxat.

PRÆPARATIO.

Ducatur recta linea duo centra E, F connectens, quæ per punctum contactus A transibit (*per* 12.) In hypothesi vero, quod duo circuli propositi etiam sese tangant in puncto B, jungantur duæ rectæ EB, FB.

DEMONSTRATIO.

Manifestum est, ut in superiori demonstratione, in triangulo EBF, duo latera EB, FB sive (*per axi.* 13.) seu duas rectas EA, FA iis æquales, esse simul majora tertio EF; quod quum absurdum sit; absurdum quoque erit, duos circulos propositos in duobus punctis sese contingere; *quod ostendendum supererat*.

In hac demonstratione cogimur centra circulorum extra propriam sedem, ut oculari inspectioni satisfiat, vel inviti collocare; quod sane videtur absurdum. At quum duo puncta, in quibus circuli sese tangunt, exhibenda sint, ea solo intellectuali discursu concipienda erunt; quæ enim impossibilia sunt, depingi minime possunt.

PROPOSITIO XIV.

THEOREMA XIII.

IN circulo rectæ æquales æqualiter distant a centro; quæque æqualiter a centro distant eæ sunt æquales.

Dico 1. si duæ lineæ AB, CD (*fig.* 14. *tab.* 3.) sunt æquales, eas æqualiter a centro E distare, quare si a centro E ducantur binæ rectæ EF, EG iisdem perpendiculares, quæ eas bifariam divident (*per* 3.) hæ duæ rectæ erunt æquales (*per def.* 4.)

DEMONSTRATIO.

Ductis quatuor radiis EA, EB, EC, ED manifestum est, duo triangula isoscelia ABE, CDE (*per* 8. 1.) esse æqualia, proindeque duos angulos B, & C esse æquales. Ex quo sequitur, duo triangula BEF, CEG esse æqualia (*per* 4.) proindeque basim EF æqualem esse basi EG; *quod primo loco erat ostendendum*.

Dico 2. si duæ rectæ EF, EG sint æquales, binas etiam AB, CD esse æquales.

DEMONSTRATIO.

Quoniam duo quadrata BF, EF sunt simul æqualia quadrato radii BE, vel CE; & vicissim duo quadrata CG, EG sunt simul æqualia eidem quadrato CE (*per* 47. 1.) duo quadrata FB, FE erunt æqualia duobus CG, GE. Igitur sublatis duobus quadratis æqualibus BF, CG, reliquum quadratum FE æquale erit reliquo EG, atque adeo recta EF, æqualis rectæ EG; *quod ostendendum supererat*.

PRO-

PROPOSITIO XV.

THEOREMA XIV.

IN circulo maxima linearum eſt diameter; quæque centro propior eſt, major eſt ea, quæ eſt remotior.

Dico 1. in circulo cujus centrum eſt L (*fig.* 15. *tab.* 3.) maximam omnium linearum eſſe diametrum AB; proindeque eſſe majorem linea CD.

DEMONSTRATIO.

Ductis duobus radiis LD, LC, manifeſtum eſt (*per* 20. 1.) duo latera LC, LD trianguli CDL eſſe ſimul majora tertio latere CD; atqui eadem ſunt ſimul æqualia diametro AB (*per axi.* 13.) ergo diameter AB major eſt recta CD; *quod primo loco erat demonſtrandum.*

Dico 2. lineam EF, quæ magis diſtat a centro L, eſſe minorem linea CD, quæ propior eſt eidem centro.

PRÆPARATIO.

Ducatur a centro L recta LG perpendicularis rectæ CD, tum recta LH perpendicularis rectæ EF. Et quoniam linea LH major eſt linea LG, ſiquidem linea EF poſita eſt longius diſtare a centro, quam CD, ſumta ſuper eam parte LO æquali rectæ LG, ducatur per punctum O recta IK perpendicularis rectæ LH; quæ (*per* 14.) rectæ CD æqualis erit; denique jungantur radii LI, LK, LE, LF.

DEMONSTRATIO.

Quoniam duo latera LI, LK trianguli ILK æqualia sunt duobus lateribus LE, LF trianguli ELF, & angulus comprehensus ILK major est angulo comprehenso ELF, basis etiam IK, sive CD ipsi æqualis, major erit basi EF; *quod ostendendum supererat*.

Hujus propositionis beneficio ostendi potest, circulos, qui a sphæræ centro sunt remotiores, minores esse iis, qui centro sunt propiores; nam eorum diametri necessario sunt breviores. Quocirca duo circuli polares in sphæra armillari *minores sunt duobus* tropicis; *maximi vero omnium sunt, qui per sphereæ centrum transeunt, qui in eadem sphæra sex numerantur: nimirum*, Æquator, Horizon, Zodiacus, Meridianus, *& duo* Coluri, *qui scilicet per quatuor puncta cardinalia eccliptica transeunt, solstitialia nempe; & æquinoctialia.*

PROPOSITIO XVI.

THEOREMA XV.

Recta, quæ per extremum diametri eidem diametro ad angulos rectos ducitur, tota est extra circulum, ipsumque tangit duntaxat; nec alia linea inter ipsam, & circuli circumferentiam duci potest ad idem punctum contactus, quæ circulum non secet.

Dico 1. rectam CD (*fig.* 16. *tab.* 3.) quæ per extremum A diametri AB ad angulos rectos eidem diametro ducitur, esse totam extra circulum; quare quodlibet punctum in ea sumtum, v. g. H, a centro remotius erit, quam punctum A.

DE-

DEMONSTRATIO.

Ducta recta EH, manifestum est, in triangulo rectangulo AEH majus latus esse hypotenusam EH (*per* 19. & 32. 1.) Ergo punctum H magis distat a centro, quam punctum A, quod in extremo diametri positum est; *quod primum fuerat ostendendum*.

Dico 2. a puncto contactus A, sub tangente CD si ducatur recta FA, hæc circulum secabit.

PRÆPARATIO.

Ducatur a centro E recta EG perpendicularis rectæ AF, quæ ipsam sub punctum A alicubi dividet, ob angulum acutum EAF.

DEMONSTRATIO.

Quoniam angulus AGE trianguli EAG rectus est (*per constr.*) reliquis duobus major est (*per* 32. 1.) proindeque hypotenusa EA major erit latere EG (*per* 19. 1.) Igitur punctum G minus distat a centro E, quam punctum A, adeoque est intra circulum; *quod reliquum erat ostendere*.

SCHOLIUM.

Huic propositioni aliud Theorema addunt Euclidis Interpretes, videlicet: Angulum semicirculi, nempe angulum mixtum EAI, quolibet angulo acuto majorem esse; id quod evidens est, nam convenit cum angulo BAD, qui rectus est. Id autem ex ipsa anguli recti definitione constat; diameter enim, quemadmodum etiam quilibet radius circuli, ita in circumferentiam incidit, ut angulos utrobique æquales efficiat, atque adeo rectos.

Ut cognoscatur valor anguli mixti DAF, v. g. (fig. 31. tab. 3.) *ducenda est linea recta AC curvam tangens in puncto A, in quo fit angulus mixtus, ut docebimus sequenti propositione; angulus enim mixtus aequalis est angulo rectilineo, qui fit a tangente, una cum latere recto anguli mixti. Hinc angulus mixtus DAF cognoscitur esse aequalis angulo rectilineo DAC.*

PROPOSITIO XVII.

PROBLEMA II.

A Dato extra circulum puncto rectam eundem circulum tangentem ducere.

Ut ducatur a puncto A dato extra circulum CEG (*fig.* 17. *tab.* 3.) recta circumferentiam EC tangens, ducatur a puncto dato A ad centrum B recta AB, quae circumferentiam secet in puncto C, a quo excitetur perpendicularis CD indefinita. Ducatur item a puncto B, ad intervallum BA arcus circuli ADF, qui secet rectam CD in puncto D. Denique a centro B ad punctum D ducatur recta DB, & per punctum E, in quo ea circumferentiam CE secat, ducatur ad punctum A datum recta FA, quae erit tangens, quam inquirimus.

DEMONSTRATIO.

Quoniam duo triangula BAE, BDC sunt inter se aequalia (*per* 4. 1.) ob duo latera BA, BE aequali a duobus lateribus BD, BC, alterum alteri (*per ax.* 13.) & angulum comprehensum B communem, etiam angulus BEA aequalis erit angulo BCD recto, (*per const.*) & proinde rectus erit; ex quo fit, ut recta FA tangat circulum in puncto E; *quod erat faciendum, & demonstrandum.*

Usus tangentium frequentissimus est in omni mathematica. Iis enim utuntur Geometræ, quum in Trigonometria, ut videbimus in Trigonometriæ synopsi; tum in Geometria, ubi agitur de circuli quadratura, ad quam proxime accedunt ope polygonorum circulis circumscriptorum, ut tentavit Archimedes. Iis utuntur etiam Physico-mathematici in Optica, Dioptrica, & Catoptrica ad definiendos tum refractionum, tum reflexionum, qui in superficiebus curvis fiunt, angulos. Siquidem, ut dictum est ad Propositionem XVI, anguli mixti valor ope tangentium cognoscitur.

PROPOSITIO XVIII.

THEOREMA XVI.

SI circulum tangat recta linea, ad punctum autem contactus alia recta a centro ducatur, hæc erit tangenti ad angulos rectos.

Hæc propositio evidens est, quum sit corollarium Prop. XVI. Si enim angulus EAD (*fig.* 16. *tab.* 3.) sit acutus, vel obtusus, duci poterit ad tangentem CD recta EH, vel EK, eidem perpendicularis. Quoniam igitur angulus EHA rectus est, hypotenusa EA major erit latere EH, quod absurdum est (*per* 16.).

Hinc colligi potest, quemlibet radium circuli esse perpendicularem circumferentiæ, quod sane maximi est usus in Dioptrica, ubi refractionum anguli comparate ad perpendiculares lineas computantur, quæ in conspicillis, seu vitris convexis, & concavis sunt totidem radii a centro convexitatis, seu concavitatis ducti.

PRO-

PROPOSITIO XIX.

THEOREMA XVII.

PErpendicularis intra circulum ad tangentem in puncto contactus ducta per centrum transit.

Hæc propositio, quæ est conversa præcedentis, pariter evidens est. Si enim ponatur centrum circuli CDE (*fig.* 18. *tab.* 3.) esse aliud a puncto F, puta G, linea GC erit tangenti AB perpendicularis, (*per* 18.) proindeque conveniet cum recta FC, quæ (*ex hypoth.*) est item perpendicularis eidem tangenti.

PROPOSITIO XX.

THEOREMA XVIII.

IN omni circulo angulus ad centrum duplus est anguli ad circumferentiam, si eidem arcui ambo insistant.

Angulus ad circumferentiam dicitur, cujus vertex ad aliquod circumferentiæ punctum desinit, ut B AC (*fig.* 19. 20. & 21. *tab.* 3.) angulus vero ad centrum, cujus vertex est in centro, ut BDC. Tribus autem modis constitutus esse potest angulus ad centrum comparate ad angulum ad circumferentiam. Vel enim duo latera anguli ad circumferentiam includunt angulum ad centrum, (*ut figura* 19.) Vel alterum latus anguli ad circumferentiam convenit cum latere anguli ad centrum (*ut fig.* 20.) Vel denique latus unius latus alterius anguli secat (*ut fig.* 21.) In omnibus autem his casibus dico, angulum BDC, qui est ad centrum, esse duplum anguli BAC, qui est ad circumferentiam; dummodo eidem arcui BC uterque sit innixus

DE-

DEMONSTRATIO 1.

Ducta ab angulo A (*fig.* 19.) per centrum L recta AE, manifestum est, angulum BDE, qui est exterior comparate ad triangulum ABD, esse æqualem duobus interioribus oppositis DAB, DBA (*per* 32. 1.) qui ambo quum sint inter se æquales (*per* 5. 1.) jam agulus BDE est duplus anguli DAB. Eodem modo ostendi potest, angulum CDE esse duplum anguli DAC; quare totus angulus BDC est duplus totius anguli BAC; *quod primum erat ostendendum*.

DEMONSTRATIO 2.

Quoniam angulus BDC (*fig.* 20.) exterior est comparate ad triangulum isoscelium ABD, æqualis est duobus interioribus oppositis A, & B (*per* 32. 1.) qui quum sint æquales (*per* 5. 1.) sequitur angulum BDC esse utriusque seorsum sumti duplum; *quod secundum erat ostendendum*.

DEMONSTRATIO 3.

Ducta per centrum D recta AE (*fig.* 21.) evidens est, ut in superioribus demonstrationibus, angulum CDE, qui est externus comparate ad triangulum ACD, esse duplum anguli CAD; itemque angulum BDE, qui est externus comparate ad triangulum ABD, esse duplum anguli BAD. Igitur sublato angulo BDE duplo anguli BAD, reliquus angulus BDC erit duplus anguli reliqui BAC; *quod postremo supererat demonstrandum*.

SCHO-

SCHOLION.

Hac propositione uti possumus, ut conficiamus angulum duplum alterius dati. Sit enim datus angulus BEF (*fig.* 22. *tab.* 3.) ut angulus ipsius duplus constituatur, sumatur super altero ex ejus lateribus, puta BE, punctum aliquod, ut A, a quo ad intervallum AE ducatur semicirculus EFD, qui secet aliud latus FE in aliquo puncto, ut in F; ductaqua a centro A ad punctum F recta AC, fiet angulus BAF duplus anguli dati BEF.

PROPOSITIO XXI.

THEOREMA XIX.

Qui in eodem circuli segmento sunt anguli, omnes sunt æquales, sive sint in segmento majore, sive minore, quam semicirculus.

Dico 1. angulos ADB, ACB (*fig.* 23. *tab.* 3.) qui sunt in eodem segmento ADCB majore, quam semicirculus, esse æquales.

DEMONSTRATIO.

Ductis a centro E duobus radiis EA, EB, manifestum est (*per* 20.) utrumque angulum C, & D esse dimidium anguli AEB; proindeque eos esse æquales; *quod primum erat ostendendum*.

Dico 2. duos angulos ADB, ACB (*fig.* 24. *tab.* 3.) qui sunt in eodem segmento ADCB minore, quam semicirculus, esse item æquales.

DEMONSTRATIO.

Quoniam angulus DEC est externus comparate ad triangulum AED, est æqualis (*per* 32. 1.) duobus interioribus oppositis EAD, EDA; itemque quoniam angulus AEB est externus comparate ad triangulum BCE, est æqualis (*per* 32. 1.) duobus internis oppositis EBC, ECB. Atqui duo anguli AEB, CED ad verticem oppositi sunt æquales (*per* 15. 1.) ergo etiam summa duorum angulorum EAD, EDA æqualis erit summæ duorum EBC, ECB. Itaque sublatis ab utraque summa duobus angulis CAD, CBD, qui sunt æquales per superiorem demonstrationem (sunt enim in eodem segmento DABC majore quam semicirculus) reliquus angulus ADB æqualis erit reliquo ACB; *quod demonstrandum supererat*.

PROPOSITIO XXII.

THEOREMA XX.

ANguli oppositi quadrilateri circulo inscripti sunt simul æquales duobus angulis rectis.

Dico, duos angulos BAD, BCD (*fig.* 25. *tab.* 3.) quadrilateri ABCD circulo inscripti, esse simul æquales duobus rectis angulis.

DEMONSTRATIO.

Ductis diagonalibus AC, BD, manifestum est (*per* 20.) angulum BDC æqualem esse angulo BAC, qui eidem arcui BC insistit; rursus angulum DBC æqualem esse angulo DAC ob eandem rationem. Quare totus angulus BAD æqualis est summæ duorum CDB, CBD. Addito igitur utrique parti com-

muni angulo BCD, evidens est, duos angulos opposi-tos BAD, BCD esse æquales tribus angulis CDB, CBD, BCD, nimirum (*per* 32. 1.) duobus rectis; *quod ostendendum susceperamus*.

PROPOSITIO XXIII.

THEOREMA XXI.

Duo similia circuli segmenta super eamdem rectam lineam descripta sunt inter se æqualia.

Dico, si duo segmenta ACB, ADB (*fig.* 26. *tab.* 3.) super eandem rectam AB descripta similia sint, esse inter se æqualia. Segmenta similia sunt, quæ æquales angulos suscipiunt (*per def.* 8.)

PRÆPARATIO.

Statuatur segmentum ADB super segmentum ACB, convertendo illud per cogitationem circa communem basim AB; quo facto evidens est, ista duo segmenta inter se convenire. In hypothesi tamen, quod non conveniant, & segmentum ADB cadat ultra punctum C in E, producatur recta AC in E, jungaturque recta BE.

DEMONSTRATIO.

Quoniam segmentum AEB æquale est segmento ADB, quod est simile segmento ACB (*ex hyp.*) angulus AEB æqualis est angulo ADB (*per def.* 8.) & proinde etiam angulo ACB. Atqui id absurdum est (*per* 16. 1.) angulus enim ACB, quum sit externus comparate ad triangulum CBE, major est angulo sibi oppo-
sito

sito E. Ergo segmentum ADB cum segmento ACB congruere debet, proindeque est ipsi æquale; *quod operæpretium erat demonstrare.*

PROPOSITIO XXIV.

THEOREMA XXII.

Duo similia circuli segmenta super æqualibus lineis descripta sunt inter se æqualia.

Hæc propositio eadem est, ac præcedens; proindeque eadem ratione est demonstranda.

PROPOSITIO XXV.

PROBLEMA III.

Data circuli sectione, centrum circuli invenire.

Ut inveniatur centrum circuli, cujus segmentum est ABC (*fig.* 27. *tab.* 3.) sumantur ad libitum tria puncta in periferia ABC, ut A, B, C, junganturque rectæ AB, BC; quibus bifariam divisis in D, & E, excitentur binæ perpendiculares EF, DF, quæ sibi occurrentes dabunt punctum F; quod erit centrum, de quo est quæstio.

DEMONSTRATIO.

Quoniam (*per* 1.) centrum circuli est in utraque perpendiculari DF, EF, nequit esse nisi in puncto, in quo sese intersecant; ex quo conficitur, centrum circuli ABC esse punctum F; *quod quum facere, tum demonstrare oportebat.*

 Hac

Hac propositione uti possumus ad inveniendum focum lentis vitreæ, qui in centro ejus convexitatis, vel concavitatis positus est, si lens sit utraque parte convexa, vel concava.

PROPOSITIO XXVI.

THEOREMA XXIII.

IN æqualibus circulis æquales anguli, sive ad centrum, sive ad circumferentiam, æqualibus arcubus innituntur.

Dico 1. si duo anguli ad centrum C, & G (*fig.* 28. *tab.* 3.) qui sunt in circulis æqualibus ADBI, EHFK, sint æquales, duos arcus AIB, EKF, quibus innituntur, esse item æquales.

DEMONSTRATIO.

Quoniam duo latera CA, CB trianguli ACB æqualia sunt duobus lateribus GE, GF trianguli EGF, & angulus comprehensus C æqualis est angulo G item comprehenso (*ex hypoth.*) hæc duo triangula sunt æqualia (*per* 4. 1.) & basis AB æqualis basi EF; proindeque etiam arcus AIB æqualis arcui EKF (*per* 24.) *quod primum ostendere oportebat*.

Dico 2. si duo anguli ad circumferentiam D, & H sint æquales, etiam arcus AIB, EKF æquales esse. Id autem evidens est; nam uterque angulus est dimidius anguli ad centrum (*per* 20.) *quod demonstrandum supererat*.

COROLLARIUM.

Hinc manifestum est, æquales angulos in eodem cir-

circulo, sive ad centrum, sive ad circumferentiam, æqualibus arcubus esse innixos.

PROPOSITIO XXVII.

THEOREMA XXIV.

Anguli ad centrum, vel ad circumferentiam, sunt æquales, si æqualibus arcubus innitantur.

Hæc propositio, quæ est conversa præcedentis, per se ipsa evidens est, ut colligitur ex iis, quæ adnotavimus ad Propositionem XIII Libri I. nimirum, angulorum mensuram esse arcus, quibus innituntur, quare si duo arcus AIB, EKF (*fig.* 28. *tab.* 3.) sint æquales (*ex hyp.*) anguli etiam C, & G erunt æquales, non minus ac D, & H, qui sunt eorum dimidii.

PROPOSITIO XXVIII.

THEOREMA XXV.

Lineæ æquales in æqualibus circulis æqualibus arcubus subtenduntur.

Hæc propositio evidens est. Si enim in duobus circulis æqualibus ABD, EFH (*fig.* 28. *tab.* 3.) duæ rectæ AB, EF sint æquales, duo anguli C, & G erunt æquales, ob duo triangula æqualia ABC, EFG (*per* 8. 1.) quare etiam duo arcus AIB, EKF erunt æquales (*per* 26.) *quod ostendere oportebat*.



PRO-

PROPOSITIO XXIX.

THEOREMA XXVI.

IN circulis æqualibus arcus æquales ab æqualibus lineis ſubtenduntur.

Hæc item propoſitio, quæ eſt converſa præcedentis, evidens eſt; Nam ſi duo arcus AIB, EKF (*fig.* 28. *tab.* 3.) ſunt æquales, duo anguli C, & G erunt æquales (*per* 27.) & proinde duo triangula ABC, EFG, æqualia (*per* 4. 1.) atque adeo baſes quoque AB, EF; *quod oſtendere oportebat*.

PROPOSITIO XXX.

PROBLEMA IV.

DAti circuli arcum biſariam ſecare.

Sit arcus ABC (*fig.* 29. *tab* 3.) quem biſariam dividere oportet. Jungantur itaque ejus extrema A, & C per rectam AC, eaque biſariam ſecta in D, excitetur a puncto D perpendicularis DB, quæ arcum datum biſariam ſecabit in B.

DEMONSTRATIO.

Ductis AB, BC, manifeſtum eſt eas (*per* 4. 1.) eſſe æquales ob duo triangula æqualia BDA, BDC; Quare etiam duo arcus, quibus eæ ſubtenduntur, erunt æquales (*per* 28.) *quod tum facere, tum demonſtrare oportebat*.

Hæc propoſitio utilis eſt ad diviſionem circuli in 32 partes æquales, juxta ventorum numerum, qui in acu nautica deſignari ſolent. Ea etiam aliquantum ad-

adjuvare potest ad secandum circulum in suas 360 partes, licet sola non sufficiat, ut id geometrica methodo fiat; quod in caussa est, cur problema ejusmodi inter problemata solida referatur, quæ nimirum ope sectionum conicarum resolvuntur. Siquidem dividendus est angulus in tres ad minus partes æquales, quod sane linearum rectarum, & circulorum ope duntaxat, quibus utimur in problematis planis, perfici nequit.

Mechanicam circulum in quot libuerit partes dividendi rationem præbet instrumentum illud, quod Circinus proportionis dicitur, de quo inferius.

PROPOSITIO XXXI.

THEOREMA XXVII.

IN omni circulo anguli, qui fiunt in semicirculo, sunt recti; qui in segmento majore, acuti; qui denique in segmento minore, obtusi.

Dico 1. angulum ABC (*fig.* 30. *tab.* 3.) qui fit in semicirculo ABDC, esse rectum.

DEMONSTRATIO.

Ducto radio BE, manifestum est (*per* 5. 1.) in triangulo isoscelio ABE angulum EBA æqualem esse angulo EAB. Similiter in triangulo isoscelio BCE angulum EBC æqualem esse angulo ECB, ob eandem rationem. Ex quo sequitur, totum angulum ABC æqualem esse duobus angulis BAC, BCA simul sumtis, videlicet (*per* 32. 1.) angulo exteriori ABF; id quod ostendit, duos angulos ABC, ABF esse rectos (*per* 13. 1.) *quod primum ostendere oportebat*.

Dico 2. angulum A, qui fit in segmento majore

CAB

CAB, vel angulum BCA, qui fit in ſegmento ACDB, eſſe acutum.

DEMONSTRATIO.

Quoniam in triangulo ABC angulus B rectus eſt, per ſuperiorem demonſtrationem, reliqui duo A, & C erunt acuti (*per* 32. 1.) *quod* 2 *erat oſtendendum*.

Dico 3. angulum D, qui fit in ſegmento minore BDC eſſe obtuſum.

DEMONSTRATIO.

Quoniam duo anguli oppoſiti A, & D quadrilateri ABDC ſunt æquales duobus rectis (*per* 22.) & angulus A eſt acutus, alter, nimirum D, erit obtuſus; *quod oſtendendum ſupererat*.

COROLLARIUM.

Omnes anguli, qui in eodem ſegmento fiunt, æquales ſunt.

PROPOSITIO XXXII.

THEOREMA XXVIII.

SI recta linea circulum tangat, alia vero a puncto contactus ducta circulum ſecet, angulus, qui ab utraque fit, æqualis erit angulo, qui fit in ſegmento alterno.

Segmentum alternum dicitur, quod ex altera parte jacet ab angulo, qui fit a ſecante, una cum tangente in puncto contactus. Ex. g. ſegmentum AFD (fig. 31.

31. tab. 3.) *est alternum comparate ad angulum BAD; segmentum vero AED est item alternum comparate ad angulum CAD: His præmissis.*

Dico 1. angulum CAD, qui fit a tangente BC, una cum secante AD, in puncto contactus A, æqualem esse angulo E, qui fit in segmento alterno AED.

DEMONSTRATIO.

Ducta diametro AE, manifestum est, angulum ADE trianguli AED rectum esse (*per* 31.) proindeque reliquos duos DEA, DAE esse simul æquales uni recto (*per* 32.1.) atque adeo toti angulo CAE, qui rectus est (*per* 16.) Sublato igitur communi angulo DAE, reliquus CAD æqualis erit reliquo DEA; *quod primum ostendere oportebat.*

Dico 2. angulum BAD æqualem esse angulo F, qui fit in segmento alterno AFD.

DEMONSTRATIO.

Quoniam in quadrilatero AFDE duo anguli oppositi E, & F sunt simul æquales duobus rectis (*per* 22.) non secus, ac duo DAB, DAC (*per* 13.1.) sublato angulo DAC æquali angulo E, per superiorem demonstrationem; reliquus DAB æqualis erit reliquo angulo F; *quod ostendendum supererat.*

SCHOLIUM.

Si recta circulum secans esset diameter AE, hæc sane tangenti BC ad angulos rectos insisteret (*per* 18. qui proinde angulis, qui fierent in semicirculis, æquales essent (*per* 31.)

Q PRO-

PROPOSITIO XXXIII.

PROBLEMA V.

Super datam rectam lineam circuli segmentum describere capiens angulum æqualem angulo dato.

Evidens est, quod si datus angulus rectus sit, sufficit super datam rectam semicirculum describere. Quod si datus angulus ABC (*fig.* 32. *tab.* 3.) minime rectus sit, excitetur a puncto B recta BD perpendicularis rectæ BC; deinde in puncto A fiat angulus EAB æqualis angulo EBA, per rectam AE, quæ erit æqualis rectæ EB (*per* 6. 1.) denique a puncto E, intervallo vero EB, describatur arcus ADB, qui capax erit anguli ADB æqualis angulo ABC dato.

DEMONSTRATIO.

Quoniam linea BC perpendicularis est diametro DB (*per constr.*) tangit circulum in puncto B (*per* 18.) quare angulus D, qui fit in segmento alterno ADB, æqualis erit angulo ABC, qui fit a tangente CB, una cum secante AB (*per* 32.) *quod tum facere, tum demonstrare oportebat.*

PROPOSITIO XXXIV.

PROBLEMA VI.

A Dato circulo segmentum abscindere capiens angulum æqualem angulo dato.

Manifestum est (*per* 31.) quod si datus angulus sit rectus, sufficit, ut in dato circulo diameter quæ

quum-

quumque ducatur, quæ semicirculum dabit capacem anguli recti. Quod si datus angulus minime rectus sit, ducatur (*per* 17.) per punctum A ad libitum sumtum in peripheria ADE (*fig.* 33. *tab.* 3.) tangens BC, & in eodem puncto fiat angulus æqualis angulo dato, ex. g. angulus DAC, per rectam AD, quæ dabit segmentum AED capax anguli æqualis angulo DAC (*per* 32.) proindeque etiam angulo dato; *quod facere, & demonstrare oportebat.*

PROPOSITIO XXXV.

THEOREMA XXIX.

SI binæ rectæ in circulo sese intersecent, rectangulum sub duabus partibus unius comprehensum æquale erit rectangulo sub alterius partibus comprehenso.

Duæ rectæ diversimode possunt in circulo sese intersecare. Vel enim sese in centro intersecant, quo casu manifestum est, duo rectangula sub earum segmentis comprehensa esse totidem quadrata ejusdem radii, & proinde æqualia.

Quod si eæ lineæ extra centrum sese intersecent, tunc vel altera per centrum transiens alteram secat bifariam, & proinde ad angulos rectos (per 3.) *Vel eadem per centrum transiens alteram minime bifariam secat. Vel denique ambæ extra centrum sese vicissim dividunt. In omnibus his casibus rectangulum sub partibus unius æquale est rectangulo sub partibus alterius.*

Dico 1. si recta AB (*fig.* 1. *tab.* 4.) per centrum F transiens rectam CD in eodem circulo existentem bifariam secet, rectangulum sub AE, EB æquale esse rectangulo sub partibus æqualibus ED, EC, nimirum quadrato dimidiæ CE.

DEMONSTRATIO.

Quoniam linea AB divisa est bifariam in F, & in duas partes inæquales in E, rectangulum sub AE, EB, una cum quadrato partis interceptæ FE, æquale est quadrato dimidiæ FA, vel FC (*per* 5. 2.) sive (*per* 47. 1.) duobus quadratis EF, EC. Quare si utrinque auferas commune quadratum EF, reliquum rectangulum AE, EB æquale erit reliquo quadrato EC; *quod primum ostendere oportebat*.

Dico 2. si linea AB (*fig.* 2. *tab.* 4.) per centrum F transiens secet alteram CD oblique in E, rectangulum sub partibus AE, EB æquale esse rectangulo sub partibus CE, ED.

DEMONSTRATIO.

Ducta a centro F perpendiculari FG, quæ rectam CD bifariam dividet in G (*per* 3.) ductoque radio CF, manifestum est, (*per* 5. 2.) rectangulum sub partibus CE, DE, una cum quadrato partis intermediæ EG, æquale esse quadrato dimidiæ CG. Quocirca addito utrique parti quadrato perpendicularis FG, evidens est, rectangulum sub CE, ED, una cum duobus quadratis GE, GF, sive (*per* 47. 1.) cum solo quadrato EF, æquale esse duobus quadratis GC, GF, sive (*per* 47. 1.) soli quadrato CF, vel AF, sive (*per* 5. 2.) rectangulo sub AE, EB, una cum quadrato partis interceptæ FE; quare si utrinque auferatur commune quadratum EF, reliquum rectangulum sub CE, ED æquale erit reliquo sub AE, EB; *quod 2. erat ostendendum*.

Dico 3. si duæ lineæ CD, HI extra centrum existentes sese intersecent, rectangulum sub CE, ED æquale esse rectangulo sub HE, EI.

DE-

DEMONSTRATIO.

Ducta per punctum intersectionis E recta AB, quæ per centrum transeat, manifestum est per superiorem demostrationem, rectangulum sub AE, EB æquale esse rectangulo sub CE, ED, perinde, ac rectangulo sub HE, EI seorsim sumtis; quod in caussa est, cur rectangulum CE, ED æquale sit rectangulo HE, EI; *quod demonstrandum supererat*.

PROPOSITIO XXXVI.

THEOREMA XXX.

Si a puncto aliquo extra circulum sumto binæ rectæ ad circuli peripheriam ducantur, quarum altera circulum tangat, altera vero eumdem circulum secet, sive per centrum transiens, sive non, quadratum tangentis æquale erit rectangulo, quod fit sub tota secante, & ea parte, quæ extra circulum jacet.

Dico I. si secans AB (*fig.* 3. *tab.* 4.) per centrum D transeat, quadratum tangentis AE æquale esse rectangulo sub tota AB, & parte exteriore AC.

DEMONSTRATIO.

Ducto radio DE, manifestum est (*per* 18.) triangulum ADE esse rectangulum in E; & (*per* 6. 2.) rectangulum sub AB, AC, una cum quadrato CD, æquale esse quadrato AD, sive (*per* 47. 1.) duobus quadratis AE, DE, vel CD. Quare demto communi quadrato CD, vel DE, reliquum quadratum AE æquale erit rectangulo sub AB, AC; *quod primum ostendere oportebat*. Di-

Dico 2. quadratum tangentis AE (*fig.* 4. *tab.* 4.) æquale esse rectangulo sub tota secante AB, quæ per centrum non transit, & parte exteriore AC.

PRÆPARATIO.

Ducto radio DE, qui tangenti AE erit ad angulos rectos (*per* 18.) ducatur radius item DC; & a centro D ad lineam AB ducatur perpendicularis DG, quæ partem BC dividet bifariam in G (*per* 3.); denique jungatur recta AD.

DEMONSTRATIO.

Quoniam rectangulum sub tota AB, & parte AC, una cum quadrato CG, æquale est quadrato AG (*per* 6. 2.) addito utrique parti quadrato perpendicularis DG, manifestum est, rectangulum sub AB, AC, una cum duobus quadratis CG, DG, sive (*per* 47. 1.) cum solo quadrato DC, aut DE, æquale esse duobus quadratis AG, DG, sive (*per* 47 1.) soli quadrato AD, sive etiam, (*per* 47. 1.) duobus quadratis AE, DE. Sublato igitur utrinque communi quadrato DE, vel DC, reliquum rectangulum sub AB, AC æquale erit quadrato tangentis AE; *quod reliquum erat ostendere*.

COROLLARIUM I.

Si ab eodem puncto A duæ rectæ circulum secantes AB AH ducantur, rectangulum sub AB, AC æquale erit rectangulo sub AH, AI; utrumque enim seorsum æquale est quadrato tangentis AE.

COROLLARIUM II.

Si ab eodem puncto A binæ tangentes AE, AF du-

ducantur, eæ erunt inter se æquales, quoniam utriusque quadratum seorsum æquale erit rectangulo sub tota secante AB, & parte AC.

PROPOSITIO XXXVII.

THEOREMA XXXI.

SI rectangulum sub recta circulum secante, & ejus exteriore parte, æquale sit quadrato alterius lineæ, quæ in circuli circumferentiam incidat, hæc circulum minime secabit.

Dico, si rectangulum sub tota secante AB, & parte exteriore AC (*fig.* 4. *tab.* 4.) æquale sit quadrato rectæ AE in peripheriam circuli incidentis; hanc circulum tangere in puncto E.

PRÆPARATIO.

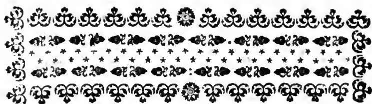
Juncta recta AD, & ab eodem puncto alia tangente AF, ducantur duo radii DE, DF.

DEMONSTRATIO.

Manifestum est, quadratum tangentis AF (*per* 36.) æquale esse rectangulo sub AB, AC. Quoniam igitur quadratum AE æquale est eidem rectangulo (*ex hyp.*) sequitur, binas rectas AE, AF esse inter se æquales, & proinde angulum AED æqualem esse angulo AFD (*per* 8. 1.) qui quum sit rectus (*per* 18.) angulus quoque AED erit rectus; & (*per* 16.) recta AE erit tangens circulum; *quod demonstrandum erat*.

Finis Libri Tertii.

LI-



LIBER QARTUS.



Xplicatis præcipuis circuli proprietatibus, nonnulla problemata hoc quarto libro Euclides proponit, de figuris rectilineis regularibus circulo inscribendis, vel circumscribendis; quorum usus maximus est, tum in arcium munitarum, & propugnaculorum constructione; tum in Trigonometria ad supputationem tabulæ sinuum, & tangentium; tum denique in Geometria ad quadraturam circuli, ut suo loco videbimus.

DEFINITIONES.

I. Figura rectilinea alteri figuræ rectilineæ inscripta dicitur, quum vertex cujuslibet anguli unius latera alterius contingit. *Sic quadratum EFGH* (fig. 5. tab. 4.) *noscitur esse inscriptum quadrato ABCD.*

II. Figura rectilinea alteri figuræ item rectilineæ circumscripta dicitur, quum singula unius latera transeunt per omnes vertices angulorum alterius. *Quocirca quadratum ABCD* (fig. 5. tab. 4.) *circumscriptum erit quadrato EFGH.*

III. Figura rectilinea circulo inscripta ea est, cujus anguli omnes circuli circumferentiam contingunt. *Sic triangulum DGH* (fig. 7. tab. 4.) *inscriptum dicitur circulo HDG.*

IV.

IV. Figura rectilinea circulo circumscripta est, cujus singula latera circuli circumferentiam tangunt. *Sic triangulum IKL* (fig. 8. tab. 4.) *circulo DEF circumscriptum dicitur.*

V. Circulus figuræ rectilineæ inscriptus est, cujus circumferentia singula figuræ rectilineæ latera contingit. *Sic circulus DEF* (fig. 8. tab. 4.) *est inscriptus triangulo IKL, cujus latera tangit in punctis D, E, F.*

VI. Circulus figuræ rectilineæ circumscriptus est, cujus circumferentia per singulos angulorum figuræ vertices transit. *Hinc circulus DGH* (fig. 7. tab. 4.) *triangulo HDG circumscriptus dicitur.*

VII. Linea circulo applicata est, cujus extrema ad circuli peripheriam desinunt; *ut AE* (fig. 6. tab. 4.)

VIII. Figura regularis dicitur, quæ & æquilatera est, & æquiangula.

PROPOSITIO I.

PROBLEMA I.

DAto circulo rectam lineam applicare, quæ diametrum non excedat.

Ut applicetur circulo AECB (*fig.* 6. *tab.* 4.) recta non major diametro AB (*Si enim major esset, circulo neutiquam applicari posset, quum diameter sit maxima linearum, quæ in circulo duci possunt, ut ostensum est prop.* 15. 3.) si ea diametro æqualis sit, satis erit rectam AB per centrum circuli ducere. Si vero sit minor diametro, sumta in ipsa diametro portione æquali rectæ circulo applicandæ, v. g. BD, ducatur ab extremo B, intervallo vero BD, circulus CDF; tum ab intersectionis puncto C, vel F ducatur recta CB, quæ erit æqualis parti BD; & proinde etiam rectæ, quam circulo aptare oportebat.

PROPOSITIO II.

PROBLEMA II.

DAto circulo triangulum inſcribere æquiangulum alteri dato.

Sit datum triangulum ABC (*fig. 7. tab. 4.*) ut dato circulo DGH inſcribatur aliud triangulum habens ſingulos angulos ſingulis alterius dati æquales, ducatur ad libitum tangens EF, fiatque in puncto contactus D ex altera parte quidem angulus FDH æqualis angulo A, per rectam DH; ex altera vero angulus EDG æqualis angulo B per rectam GD. Denique jungatur recta GH.

DEMONSTRATIO.

Quoniam angulus FDH, ſive angulus A ipſi æqualis (*per conſtr.*) æqualis eſt angulo alterno G (*per 32. 3.*) itemque angulus EDG, ſive B, æqualis eſt angulo alterno H, ſequitur (*per 32. 1.*) etiam angulum GDH æqualem eſſe angulo C; proindeque triangulum DGH eſſe æquiangulum triangulo ABC; *quod erat faciendum, & demonſtrandum.*

PROPOSITIO III.

PROBLEMA III.

DAto circulo triangulum circumſcribere æquiangulum alteri dato.

Ut dato circulo EFD (*fig. 8. tab. 3.*) circumſcribatur triangulum æquiangulum dato triangulo AB C, ducatur radius quiquumque OD, & producta baſi

basi AB trianguli ABC in G, & H, fiat ad centrum O cum radio OD ex una parte angulus DOE æqualis angulo exteriori CBH, per radium OE; ex altera vero per radium OF angulus DOF æqualis alteri angulo exteriori CAG; denique per tria puncta D, E, F ducantur tres tangentes IK, KL, LI, quæ triangulum IKL constituent æquiangulum triangulo ABC.

DEMONSTRATIO.

Quoniam tria latera trianguli IKL circulum DEF tangunt (*per constr.*) jam manifestum est, ipsum esse circulo circumscriptum (*per def.* 4.) & (*per* 18. 3.) angulos, qui fiunt in punctis D, E, F, esse rectos. Et quoniam (*per* 32. 1.) quatuor anguli trapezii KDOE sunt simul æquales quatuor rectis, sublatis duobus E, & D, qui sunt recti, reliqui DOE, DKE erunt simul æquales duobus rectis, proindeque duobus CBH, CBA (*per* 13. 1.) sublatis igitur duobus angulis æqualibus (*per constr.*) CBH, DOE, reliquus angulus K æqualis erit reliquo CBA.

Eadem ratione demonstrari potest, angulum I æqualem esse angulo CAB; ex quo concluditur (*per* 32. 1.) triangulum IKL æquiangulum esse triangulo ABC; *quod faciendum, & ostendendum susceperamus.*

PROPOSITIO IV.

PROBLEMA IV.

Dato triangulo circulum inscribere.

Ut dato triangulo ABC (*fig.* 9. *tab.* 4.) inscribatur circulus, dividantur bifariam duo anguli quicumque A, & C per rectas AD, CD, & a puncto

interfectionis D ducantur ad tria trianguli latera tres rectæ perpendiculares DE, DF, DG, quæ erunt inter se æquales; proindeque a puncto D, intervallo vero DE, ducta circuli peripheria per puncta F, & G transibit.

DEMONSTRATIO.

Quoniam duo anguli DEA, DFA sunt æquales (*per constr.*) & recta AD secat bifariam angulum A, duo triangula ADE, ADF erunt æqualia (*per* 26. 1.) proindeque latus DE æqualis erit lateri DF. Eodem modo ostendi potest, latus DG æquale esse lateri DF. Quare si a puncto D, intervallo vero DE, ducatur circulus, hic per puncta F, & G transibit; atque ob angulos rectos, qui fiunt in punctis E, F, G, erit triangulo ABC inscriptus (*per* 16. 3.) *quod facere, & demonstrare oportebat.*

PROPOSITIO V.

PROBLEMA V.

Dato triangulo circulum circumscribere.

Secentur bifariam duo latera quæquumque trianguli ABC (*fig.* 11. *tab.* 4.) videlicet AB, AC in punctis D, & E, ex quibus excitentur binæ rectæ perpendiculares DF, EF; punctum autem F erit centrum circuli, qui inquiritur, si enim ducantur tres lineæ FA, FB, FC, hæ erunt æquales.

DEMONSTRATIO.

Quoniam duo triangula rectangula ADF, BDF sunt æqualia (*per* 4. 1.) ob latus AD æquale lateri DB

(*per*

(*per constr.*) & latus DF commune, reliqua duo latera FB, FA erunt æqualia. Eadem ratione demonstrari potest, duas lineas FA, FC esse æquales. Quamobrem a puncto F descriptus circulus, ad intervallum A, transibit per reliqua duo puncta B, & C, eritque idcirco triangulo ABC circumscriptus; *quod operæpretium erat facere, & demonstrare*.

SCHOLION.

Hujus problematis solutio in triangulo oxygonio facta est; ea tamen triangulo amblygonio perinde applicari potest; in quo tamen perpendiculares duo latera trianguli bifariam dividentes extra triangulum sibi mutuo occurrent; proindeque centrum circuli triangulo amblygonio BCD (*fig.* 30. *tab.* 3.) circumscripti extra ipsum triangulum positum erit (*vide prop.* 31. 3.) Ob eandem rationem centrum circuli triangulo rectangulo ABC circumscripti erit in hypotenusa AC bifariam divisa.

PROPOSITIO VI.

PROBLEMA VI.

DAto circulo quadratum inscribere.

Ducta per centrum E dati circuli ABCD (*fig.* 10. *tab.* 4.) quavis diametro AC, ducatur alia diameter BD eidem AC perpendicularis, junganturque rectæ AB, BC, CD, DA, quæ quadratum ABCD constituent.

DEMONSTRATIO

Quatuor anguli quadrilateri ABCD sunt recti (*per*

(*per* 31. 3.) quilibet enim eſt ſemicirculo inſcriptus. Inſuper quatuor latera AB, BC, CD, DA, ſunt æqualia, ſunt enim baſes totidem triangulorum rectangulorum æqualium (*per* 4. 1.) Igitur figura ABCD eſt quadratum circulo inſcriptum, *quod facere*, *& demonſtrare oportebat*.

PROPOSITIO VII.

PROBLEMA VII.

DAto circulo quadratum circumſcribere.

Ducantur per centrum I dati circuli EFGH (*fig.* 12. *tab.* 4.) binæ diametri EG, FH ſibi mutuo ad rectos angulos inſiſtentes. Tum per quatuor puncta E, F, G, H ducantur quatuor rectæ AB, BC, CD, DA circulum tangentes, quæ quadratum ABCD conſtituent dato circulo circumſcriptum.

DEMONSTRATIO.

Evidens eſt, figuram ABCD eſſe circulo EFGH circumſcriptam, quoniam ſingula ejus latera circumferentiam tangunt (*per conſtr.*) Itidem manifeſtum eſt, eamdem eſſe quadratum, ob angulos rectos, qui fiunt in punctis E, F, G, H, (*per* 18. 3.) tum ob angulos item rectos, qui fiunt in I (*per conſtr.*) atque adeo ob quatuor quadrata æqualia AI, BI, CI, DI, quæ figuram ABCD conſtituunt; *quod faciendum*, *& demonſtrandum ſuſceperamus*.

PRO-

PROPOSITIO VIII.

PROBLEMA VIII.

Dato quadrato circulum inscribere.

Divisis bifariam quatuor lateribus dati quadrati ABCD (*fig.* 12. *tab.* 4.) in punctis E, F, G, H, jungantur duæ rectæ EG, FH sese mutuo intersecantes in I, quæ erunt oppositis quadrati lateribus parallelæ (*per* 28. 1.) ob angulos rectos, qui fiunt in punctis E, F, G, H, proindeque binos, & binos æquales duobus rectis. Punctum igitur I erit centrum circuli, qui inquiritur.

DEMONSTRATIO.

Manifestum est (*per* 33. 1.) duo latera HI, EI quadrilateri AI esse æqualia duobus lateribus AE, AH; quæ quum sint æqualia, (*per constr.*) jam figura AI erit quadratum. Idipsum dic de reliquis tribus BI, CI, DI. Quare quadratum ABCD divisum erit in quatuor quadrata, quæ omnia erunt inter se æqualia ob latera AE, EB, BF, FC, CG, GD, DH, HA æqualia (*per constr.*) Ergo quatuor rectæ IE, IF, IG, IH erunt pariter æquales, proindeque si per punctum I ducatur circulus ad intervallum IE, hic per puncta E, G, H transibit; *quod facere, & demonstrare opus fuerat*.



PRO-

PROPOSITIO IX.

PROBLEMA IX.

DAto quadrato circulum circumſcribere.

Ducantur in dato quadrato ABCD (*fig.* 10. *tab.* 4.) duæ diagonales AC, BD; & punctum interſectionis E erit centrum circuli, qui inquiritur.

DEMONSTRATIO.

Quoniam omnes anguli acuti quatuor triangulorum rectangulorum AEB, BEC, CED, DEA ſunt ſemirecti (*per* 4. 2.) & proinde æquales inter ſe, non minus ac quatuor latera AB, BC, CD, DA (*ex hypoth.*) hæc quatuor triangula erunt æqualia (*per* 26. 1.) proindeque eorum latera EA, EB, EC, ED erunt pariter æqualia. Si igitur ducatur a puncto E ad intervallum EA circulus, hic per puncta B, C, D tranſibit; *quod faciendum, & demonſtrandum ſuſceperamus.*

PROPOSITIO X.

PROBLEMA X.

TRiangulum iſoſcelium deſcribere, in quo uterque angulus ad baſim ſeorſum ſumtus ſit duplus anguli ad verticem.

Ducatur recta quæqnumque AB (*fig.* 13. *tab.* 4.) quæ ita dividatur in puncto D (*per* 11. 2.) ut quadratum partis BD æquale ſit rectangulo ſub tota AB, & altera parte DA; deſcriptoque a puncto B, intervallo

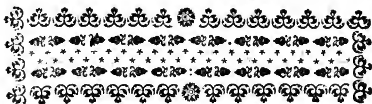
vallo vero A, arcu AC, applicetur ipsi (*per* 1.) recta AC æqualis rectæ BD, denique jungatur recta BC; sicque triangulum ABC erit illud, quod inquiritur.

DEMONSTRATIO.

Quoniam punctum B est centrum arcus AC, duo latera BA, BC erunt æqualia (*per ax.* 13.) adeoque triangulum ABC erit isosceliumi; ex quo sequitur, angulos A, & C esse æquales (*per* 5. 1.) Reliquum est igitur, ut demonstremus, utrumque angulum A, & C seorsum sumtum duplum esse anguli B; id vero præstabimus, ducendo rectam CD, & insuper per puncta B, D, C circumferentiam CDB. (*per* 5.)

Quoniam rectangulum sub tota AB, & parte AD æquale est quadrato DB, vel AC (*per constr.*) linea AC tanget circulum CDB in puncto C (*per* 37. 3.) & angulus ACD, qui fit a tangente AC, & secante DC, æqualis erit angulo B, qui fit in segmento alterno (*per* 32. 3.) Et quoniam angulus exterior ADC æqualis est (*per* 32. 1.) duobus interioribus oppositis DCB, DBC, sive duobus DCB, DCA, videlicet toti angulo ACB, sive angulo A ipsi æquali (*per constr.*) sequitur (*per* 6. 1.) lineam AC, aut BD æqualem esse lineæ CD, & (*per* 5. 1.) angulum B, sive ACD æqualem esse angulo BCD, proindeque angulum ACB, sive angulum A, duplum esse anguli B; *quod erat faciendum, & demonstrandum.*





LIBER QARTUS.

Xplicatis præcipuis circuli proprietatibus, nonnulla problemata hoc quarto libro Euclides proponit, de figuris rectilineis regularibus circulo inſcribendis, vel circumſcribendis; quorum uſus maximus eſt, tum in arcium munitarum, & propugnaculorum conſtructione; tum in Trigonometria ad ſupputationem tabulæ ſinuum, & tangentium; tum denique in Geometria ad quadraturam circuli, ut ſuo loco videbimus.

DEFINITIONES.

I. Figura rectilinea alteri figuræ rectilineæ inſcripta dicitur, quum vertex cujuslibet anguli unius latera alterius contingit. *Sic quadratum EFGH* (fig. 5. tab. 4.) *noſcitur eſſe inſcriptum quadrato ABCD.*

II. Figura rectilinea alteri figuræ item rectilineæ circumſcripta dicitur, quum ſingula unius latera tranſeunt per omnes vertices angulorum alterius. *Quocirca quadratum ABCD* (fig. 5. tab. 4.) *circumſcriptum erit quadrato EFGH.*

III. Figura rectilinea circulo inſcripta ea eſt, cujus anguli omnes circuli circumferentiam contingunt. *Sic triangulum DQH* (fig. 7. tab. 4.) *inſcriptum dicitur circulo HDG.*

IV.

IV. Figura rectilinea circulo circumscripta est, cujus singula latera circuli circumferentiam tangunt. *Sic triangulum IKL* (fig. 8. tab. 4.) *circulo DEF circumscriptum dicitur*.

V. Circulus figuræ rectilineæ inscriptus est, cujus circumferentia singula figuræ rectilineæ latera contingit. *Sic circulus DEF* (fig. 8. tab. 4.) *est inscriptus triangulo IKL, cujus latera tangit in punctis D, E, F.*

VI. Circulus figuræ rectilineæ circumscriptus est, cujus circumferentia per singulos angulorum figuræ vertices transit. *Hinc circulus DGH* (fig. 7. tab. 4.) *triangulo HDG circumscriptus dicitur.*

VII. Linea circulo applicata est, cujus extrema ad circuli peripheriam desinunt; *ut AE* (fig. 6. tab. 4.)

VIII. Figura regularis dicitur, quæ & æquilatera est, & æquiangula.

PROPOSITIO I.

PROBLEMA I.

DAto circulo rectam lineam applicare, quæ diametrum non excedat.

Ut applicetur circulo AECB (*fig.* 6. *tab.* 4.) recta non major diametro AB (*Si enim major esset, circulo neutiquam applicari posset, quum diameter sit maxima linearum, quæ in circulo duci possunt, ut ostensum est prop.* 15. 3.) si ea diametro æqualis sit, satis erit rectam AB per centrum circuli ducere. Si vero sit minor diametro, sumta in ipsa diametro portione æquali rectæ circulo applicandæ, v. g. BD, ducatur ab extremo B, intervallo vero BD, circulus CDF; tum ab intersectionis puncto C, vel F ducatur recta CB, quæ erit æqualis parti BD; & proinde etiam rectæ, quam circulo aptare oportebat.

PROPOSITIO II.

PROBLEMA II.

DAto circulo triangulum inſcribere æquiangulum alteri dato.

Sit datum triangulum ABC (*fig.* 7. *tab.* 4.) ut dato circulo DGH inſcribatur aliud triangulum habens ſingulos angulos ſingulis alterius dati æquales, ducatur ad libitum tangens EF, fiatque in puncto contactus D ex altera parte quidem angulus FDH æqualis angulo A, per rectam DH; ex altera vero angulus EDG æqualis angulo B per rectam GD. Denique jungatur recta GH.

DEMONSTRATIO.

Quoniam angulus FDH, ſive angulus A ipſi æqualis (*per conſtr.*) æqualis eſt angulo alterno G (*per* 32. 3.) itemque angulus EDG, ſive B, æqualis eſt angulo alterno H, ſequitur (*per* 32. 1.) etiam angulum GDH æqualem eſſe angulo C; proindeque triangulum DGH eſſe æquiangulum triangulo ABC; *quod erat faciendum*, & *demonſtrandum*.

PROPOSITIO III.

PROBLEMA III.

DAto circulo triangulum circumſcribere æquiangulum alteri dato.

Ut dato circulo EFD (*fig.* 8. *tab.* 3.) circumſcribatur triangulum æquiangulum dato triangulo AB C, ducatur radius quiqumque OD, & producta baſi

basi AB trianguli ABC in G, & H, fiat ad centrum O cum radio OD ex una parte angulus DOE æqualis angulo exteriori CBH, per radium OE; ex altera vero per radium OF angulus DOF æqualis alteri angulo exteriori CAG; denique per tria puncta D,E,F ducantur tres tangentes IK, KL, LI, quæ triangulum IKL constituent æquiangulum triangulo ABC.

DEMONSTRATIO.

Quoniam tria latera trianguli IKL circulum DEF tangunt (*per constr.*) jam manifestum est, ipsum esse circulo circumscriptum (*per def.* 4.) & (*per* 18.3.) angulos, qui fiunt in punctis D, E, F, esse rectos. Et quoniam (*per* 32. 1.) quatuor anguli trapezii KDOE sunt simul æquales quatuor rectis, sublatis duobus E, & D, qui sunt recti, reliqui DOE, DKE erunt simul æquales duobus rectis, proindeque duobus CBH, CBA (*per* 13. 1.) sublatis igitur duobus angulis æqualibus (*per constr.*) CBH, DOE, reliquus angulus K æqualis erit reliquo CBA.

Eadem ratione demonstrari potest, angulum I æqualem esse angulo CAB; ex quo concluditur (*per* 32. 1.) triangulum IKL æquiangulum esse triangulo ABC; *quod faciendum, & ostendendum susceperamus*.

PROPOSITIO IV.

PROBLEMA IV.

Dato triangulo circulum inscribere.

Ut dato triangulo ABC (*fig.* 9. *tab.* 4.) inscribatur circulus, dividantur bifariam duo anguli quicumque A, & C per rectas AD, CD; & a puncto

 in-

interfectionis D ducantur ad tria trianguli latera tres rectæ perpendiculares DE, DF, DG, quæ erunt inter se æquales; proindeque a puncto D, intervallo vero DE, ducta circuli peripheria per puncta F, & G transibit.

DEMONSTRATIO.

Quoniam duo anguli DEA, DFA sunt æquales (*per constr.*) & recta AD secat bifariam angulum A, duo triangula ADE, ADF erunt æqualia (*per* 26. 1.) proindeque latus DE æqualis erit lateri DF. Eodem modo ostendi potest, latus DG æquale esse lateri DF. Quare si a puncto D, intervallo vero DE, ducatur circulus, hic per puncta F, & G transibit; atque ob angulos rectos, qui fiunt in punctis E, F, G, erit triangulo ABC inscriptus (*per* 16. 3.) *quod facere, & demonstrare oportebat.*

PROPOSITIO V.

PROBLEMA V.

Dato triangulo circulum circumscribere.

Secentur bifariam duo latera quæquumque trianguli ABC (*fig.* 11. *tab.* 4.) videlicet AB, AC in punctis D, & E, ex quibus excitentur binæ rectæ perpendiculares DF, EF; punctum autem F erit centrum circuli, qui inquiritur, si enim ducantur tres lineæ FA, FB, FC, hæ erunt æquales.

DEMONSTRATIO.

Quoniam duo triangula rectangula ADF, BDF sunt æqualia (*per* 4. 1.) ob latus AD æquale lateri DB

(*per*

(*per constr.*) & latus DF commune, reliqua duo latera FB, FA erunt æqualia. Eadem ratione demonstrari poteſt, duas lineas FA, FC eſſe æquales. Quamobrem a puncto F deſcriptus circulus, ad intervallum A, tranſibit per reliqua duo puncta B, & C, eritque idcirco triangulo ABC circumſcriptus; *quod operæpretium erat facere, & demonſtrare*.

SCHOLION.

Hujus problematis ſolutio in triangulo oxygonio facta eſt; ea tamen triangulo amblygonio perinde applicari poteſt; in quo tamen perpendiculares duo latera trianguli bifariam dividentes extra triangulum ſibi mutuo occurrent; proindeque centrum circuli triangulo amblygonio BCD (*fig.* 30. *tab.* 3.) circumſcripti extra ipſum triangulum poſitum erit (*vide prop.* 31. 3.) Ob eandem rationem centrum circuli triangulo rectangulo ABC circumſcripti erit in hypotenuſa AC bifariam diviſa.

PROPOSITIO VI.

PROBLEMA VI.

Dato circulo quadratum inſcribere.

Ducta per centrum E dati circuli ABCD (*fig.* 10. *tab.* 4.) quavis diametro AC, ducatur alia diameter BD eidem AC perpendicularis, junganturque rectæ AB, BC, CD, DA, quæ quadratum ABCD conſtituent.

DEMONSTRATIO

Quatuor anguli quadrilateri ABCD ſunt recti (*per*

(*per* 31. 3.) quilibet enim eſt ſemicirculo inſcriptus. Inſuper quatuor latera AB, BC, CD, DA, ſunt æqualia, ſunt enim baſes totidem triangulorum rectangulorum æqualium (*per* 4. 1.) Igitur figura ABCD eſt quadratum circulo inſcriptum, *quod facere*, *& demonſtrare oportebat*.

PROPOSITIO VII.

PROBLEMA VII.

Dato circulo quadratum circumſcribere.

Ducantur per centrum I dati circuli EFGH (*fig.* 12. *tab.* 4.) binæ diametri EG, FH ſibi mutuo ad rectos angulos inſiſtentes. Tum per quatuor puncta E, F, G, H ducantur quatuor rectæ AB, BC, CD, DA circulum tangentes, quæ quadratum ABCD conſtituent dato circulo circumſcriptum.

DEMONSTRATIO.

Evidens eſt, figuram ABCD eſſe circulo EFGH circumſcriptam, quoniam ſingula ejus latera circumferentiam tangunt (*per conſtr.*) Itidem manifeſtum eſt, eamdem eſſe quadratum, ob angulos rectos, qui fiunt in punctis E, F, G, H, (*per* 18. 3.) tum ob angulos item rectos, qui fiunt in I (*per conſtr.*) atque adeo ob quatuor quadrata æqualia AI, BI, CI, DI, quæ figuram ABCD conſtituunt; *quod faciendum*, *& demonſtrandum ſuſceperamus*.

PRO-

PROPOSITIO VIII.

PROBLEMA VIII.

DAto quadrato circulum inscribere.

Divisis bifariam quatuor lateribus dati quadrati ABCD (*fig.* 12. *tab.* 4.) in punctis E, F, G, H, jungantur duæ rectæ EG, FH sese mutuo intersecantes in I, quæ erunt oppositis quadrati lateribus parallelæ (*per* 28. 1.) ob angulos rectos, qui fiunt in punctis E, F, G, H, proindeque binos, & binos æquales duobus rectis. Punctum igitur I erit centrum circuli, qui inquiritur.

DEMONSTRATIO.

Manifestum est (*per* 33. 1.) duo latera HI, EI quadrilateri AI esse æqualia duobus lateribus AE, AH; quæ quum sint æqualia, (*per constr.*) jam figura AI erit quadratum. Idipsum dic de reliquis tribus BI, CI, DI. Quare quadratum ABCD divisum erit in quatuor quadrata, quæ omnia erunt inter se æqualia ob latera AE, EB, BF, FC, CG, GD, DH, HA æqualia (*per constr.*) Ergo quatuor rectæ IE, IF, IG, IH erunt pariter æquales, proindeque si per punctum I ducatur circulus ad intervallum IE, hic per puncta E, G, H transibit; *quod facere, & demonstrare opus fuerat*.



PRO-

PROPOSITIO IX.

PROBLEMA IX.

DAto quadrato circulum circumscribere.

Ducantur in dato quadrato ABCD (*fig.* 10. *tab.* 4.) duæ diagonales AC , BD ; & punctum intersectionis E erit centrum circuli , qui inquiritur.

DEMONSTRATIO.

Quoniam omnes anguli acuti quatuor triangulorum rectangulorum AEB, BEC, CED, DEA sunt semirecti (*per* 4. 2.) & proinde æquales inter se, non minus ac quatuor latera AB , BC , CD , DA (*ex hypoth.*) hæc quatuor triangula erunt æqualia (*per* 26. 1.) proindeque eorum latera EA , EB , EC , ED erunt pariter æqualia . Si igitur ducatur a puncto E ad intervallum EA circulus , hic per puncta B, C, D transibit ; *quod faciendum* , *&* *demonstrandum susceperamus* .

PROPOSITIO X.

PROBLEMA X.

TRiangulum isoscelium describere , in quo uterque angulus ad basim seorsum sumtus sit duplus anguli ad verticem .

Ducatur recta quæquumque AB (*fig.* 13. *tab.* 4.) quæ ita dividatur in puncto D (*per* 11. 2.) ut quadratum partis BD æquale sit rectangulo sub tota AB, & altera parte DA ; descriptoque a puncto B , intervallo

vallo vero A, arcu AC, applicetur ipsi (*per* 1.) recta AC æqualis rectæ BD, denique jungatur recta BC; sicque triangulum ABC erit illud, quod inquiritur.

DEMONSTRATIO.

Quoniam punctum B est centrum arcus AC, duo latera BA, BC erunt æqualia (*per ax.* 13.) adeoque triangulum ABC erit isoscelium; ex quo sequitur, angulos A, & C esse æquales (*per* 5. 1.) Reliquum est igitur, ut demonstremus, utrumque angulum A, & C seorsum sumtum duplum esse anguli B; id vero præstabimus, ducendo rectam CD, & insuper per puncta B, D, C circumferentiam CDB. (*per* 5.)

Quoniam rectangulum sub tota AB, & parte AD æquale est quadrato DB, vel AC (*per constr.*) linea AC tanget circulum CDB in puncto C (*per* 37. 3.) & angulus ACD, qui fit a tangente AC, & secante DC, æqualis erit angulo B, qui fit in segmento alterno (*per* 32. 3.) Et quoniam angulus exterior ADC æqualis est (*per* 32. 1.) duobus interioribus oppositis DCB, DBC, sive duobus DCB, DCA, videlicet toti angulo ACB, sive angulo A ipsi æquali (*per constr.*) sequitur (*per* 6. 1.) lineam AC, aut BD æqualem esse lineæ CD, & (*per* 5. 1.) angulum B, sive ACD æqualem esse angulo BCD, proindeque angulum ACB, sive angulum A, duplum esse anguli B; *quod erat faciendum, & demonstrandum.*



PROPOSITIO XI.

PROBLEMA XI.

DAto circulo pentagonum regulare inſcribere.

Inſcribatur (*per* 2.) dato circulo ABCDE (*fig.* 14. *tab.* 4.) triangulum iſoſcelium ABD, cujus uterque angulus ad baſim ſeorſum ſumtus ſit duplus tertii anguli, qui eſt ad verticem (*per* 10.) Quocirca angulus DAB, vel DBA, erit duplus anguli ADB. Dividantur item bifariam duo anguli DAB, DBA per rectas AC, BE. Denique jungantur puncta A, B, C, D, E per rectas AB, BC, CD, DE, EA; quo facto figura ABCDE erit pentagonum regulare, videlicet æquilaterum, & æquiangulum.

DEMONSTRATIO.

Quoniam quinque anguli ADB, CAD, CAB, EBA, EBD ſunt ſinguli dimidia pars anguli DAB (*per conſtr.*) erunt æquales, & arcus inſuper AB, BC, CD, DE, EA, qui ipſis ſubtenduntur, erunt pariter æquales (*per* 26. 3.) proindeque figura pentagona erit æquilatera, & inſuper æquiangula, nam quum ſingulis arcubus æqualibus æquales lineæ ſubtendantur, in æqualibus ejuſdem circuli ſegmentis omnes ſunt conſtituti, (*per* 27. & 28. 3.) *quod facere, & oſtendere opus fuerat.*



PRO-

PROPOSITIO XII.

PROBLEMA XII.

Dato circulo pentagonum regulare circumſcribere.

Inſcribatur (*per* 11.) dato circulo ABCDE (*fig.* 15. *tab.* 4.) pentagonum regulare AEDCB, & per quinque puncta A, B, C, D, E ducantur (*per* 17. 3.) quinque tangentes GH, HI, IL, LK, KG, quæ pentagonum, quod inquiritur, efficient.

DEMONSTRATIO.

Ductis a centro F rectis FA, FG, FB, FH, FC, manifeſtum eſt, duo triangula FGA, FGB eſſe æqualia (*per* 8. 1.) ob radium FA æqualem radio FB, ob tangentem AG æqualem tangenti BG (*per* 36. 3.) atque ob latus commune FG; quapropter duo anguli ad centrum GFA, GFB erunt item æquales, non ſecus, ac duo FGA, FGB. Eadem ratione oſtenditur, duos angulos ad centrum HFB, HFC eſſe inter ſe æquales, non minus, quam duo FHB, FHC; & quoniam totus angulus AFB æqualis eſt toti angulo BFC (*per* 27. 3.) nimirum ob duos arcus æquales AB, BC (*per conſtr.*) eorum dimidii BFG, BFH erunt item æquales. Ex quo concluditur, quatuor triangula AFG, BFG, BFH, CFH eſſe ſingula ſibi mutuo æqualia; proindeque totum angulum BGA æqualem eſſe toti angulo BHC, & latus AG lateri BH, & latus GB lateri HC. Idipſum oſtendes de reliquis lateribus, & angulis, ductis a centro F rectis lineis ad puncta I, D, L, E, K. Quare pentagonum GHILK circulo circumſcriptum erit æquilaterum, & æquiangulum; *id quod facere, & demonſtrare operæ-pretium erat.*

 PRO-

PROPOSITIO XIII.

PROBLEMA XIII.

DAto pentagono regulari circulum inscribere.

Dividantur bifariam duo anguli quiquumque pentagoni GHILK (*fig.* 15. *tab.* 4.) per rectas FG, FH; punctum autem intersectionis F erit centrum circuli, qui inquiritur; nam si ab eo ducantur rectæ FA, FB, FC &c: perpendiculares lateribus GK, GH, HI, hæ omnes erunt inter se æquales.

DEMONSTRATIO.

Quoniam angulus FGB æqualis est angulo FGA, & latus FG commune est duobus triangulis BFG, AFG, quæ sunt rectangula in A, & B (*per constr.*) hæc duo triangula erunt inter se æqualia (*per* 26. 1.), proindeque perpendicularis FA æqualis erit perpendiculari FB. Eadem ratione demonstrabis, hanc ipsam perpendicularem FB æqualem esse perpendiculari FC, proindeque tres rectas FA, FB, FC esse sibi mutuo æquales. Quare a puncto F ad intervallum A ducta circuli peripheria, hæc circulum pentagono inscriptum dabit; *quod operæpretium erat facere, & demonstrare.*



PRO-

PROPOSITIO XIV.

PROBLEMA XIV.

Dato pentagono regulari circulum circumscribere.

Secentur bifariam duo latera quæquumque pentagoni ABCDE (*fig.* 15. *tab.* 4.) v. g. AB, BC in punctis M, & N, a quibus excitentur perpendiculares FM, FN, quæ sibi occurrentes dabunt punctum F, quod erit centrum circuli, qui inquiritur; si enim a puncto F ducantur ad angulos A, B, C tres rectæ FA, FB, FC, hæ singulæ erunt sibi mutuo æquales.

DEMONSTRATIO.

Quoniam recta AM æqualis est lineæ BM (*per constr.*) & latus FM est commune utrique triangulo FMA, FMB, quæ ambo sunt rectangula in M, hæc erunt inter se æqualia (*per* 4. 1.) adeoque duæ hypotenusæ FA, FB erunt æquales. Eadem ratione demonstrabis FC rectam æqualem esse rectæ FB; ex quo conficitur, tres rectas FA, FB, FC esse singulas æquales inter se, non secus, ac reliquas duas, quæ ab eodem puncto F ad duos reliquos pentagoni angulos duci possunt. Quare a puncto F ad intervallum FA ductus circulus pentagono ABCDE circumscriptus erit; *quod faciendum*, & *demonstrandum susceperamus*.

SCHOLIUM.

Tria præcedentia Problemata, quæ pentagonum regulare respiciunt, cuilibet polygono regulari perinde applicari possunt. Id quod in caussa est, quamobrem Euclides de circulis polygono cuivis inscriben-

bendis, aut circumscribendis ulterius non agat. Etenim si polygono quidem sit inscribendus circulus, dividendi sunt bifariam ejus anguli; latera vero secanda item bifariam, si sit circumscribendus.

PROPOSITIO XV.

PROBLEMA XV.

Dato circulo exagonum regulare inscribere.

Ducatur in dato circulo ABCDEF (*fig.* 16. *tab.* 4.) cujus centrum est G, diameter quæcumque AD, atque ab altero extremo A ad intervallum AG ducatur arcus BGF, qui circulum secet in punctis B, & F, a quibus ducantur binæ diametri BE, FC. Jungantur denique sex lineæ AB, BC, CD, DE, EF, FA, quæ dabunt exagonum æquilaterum, & æquiangulum ABCDEF.

DEMONSTRATIO.

Quoniam utrumque triangulum AFG, ABG est æquilaterum, erit etiam æquiangulum (*per* 5. 1.) quocirca duo anguli AGF, AGB seorsum sumti erunt tertia pars duorum angulorum rectorum (*per* 32. 1.) quibus duo anguli DGE, DGC ad verticem oppositi erunt æquales (*per* 15. 1.) Ex quo manifestum est, utrumque angulum BGC, FGF seorsum sumtum esse trientem duorum rectorum, (*per* 13. 1.) quum tres anguli AGB, BGC, CGD sint simul æquales duobus rectis; proindeque angulos, qui sunt in G, esse singulos singulis æquales; atque ob æquales radios sex triangula in figura descripta singula singulis esse æqualia (*per* 4. 1.) ex quo sequitur bases etiam, & angulos,

los, qui sunt ad bases, esse æquales: *quod faciendum, & ostendendum erat.*

COROLLARIUM.

Hinc sequitur, latus quodlibet exagoni regularis circulo inscripti æquale esse radio ejusdem circuli; ex quo patet divisio circuli in 6 partes æquales; quibus item bifariam sectis, fiet divisio circuli in 12 partes æquales; adeoque ductis ad singula sectionis puncta rectis construi poterit dodecagonum regulare.

Ex hac propositione incipit constructio tabularum sinuum, ut videbimus in Trigonometriæ synopsi.

Ex hac propositione etiam in Physico mathematica ostendi potest, motum corporis a duabus potentiis simul conspirantibus ad angulum 120 *graduum, profectum, æqualem esse singulæ potentiæ seorsum sumtæ; siquidem angulus* 120 *graduum est angulus exagoni regularis circulo inscripti, cujus semidiameter singulis lateribus æqualis est.*

PROPOSITIO XVI.

PROBLEMA XVI.

Dato circulo Pentedecagonum regulare inscribere.

Inscribatur (*per* 2.) dato circulo ABCDEFG (*fig.* 17. *tab.* 4.) triangulum æquilaterum ACE, & (*per* 11.) pentagonum regulare ABDEG, ita ut triangulum, & pentagonum unum angulum quemvis habeant in idem punctum concurrentem, videlicet in A. Quo facto habebitur arcus CD, qui erit 24 graduum, seu quintadecima pars circuli, cujus idcirco chorda, seu subtensa, erit latus pentedecagoni regularis, sive figuræ quindecim laterum.

DE-

Manifestum est, arcum ABC, qui est tertia pars circuli, esse 120 graduum; quare si ab eo auferas arcum AB, qui est quinta pars circuli sive 72 graduum, reliquus arcus BC erit 48 graduum; quo item sublato ab arcu BD, qui item est 72 graduum, reliquus CD erit 24 graduum, proindeque quintadecima pars circuli, cujus chorda idcirco erit latus pentedecagoni, quod inquiritur; *quod facere, & ostendere opus fuerat*.

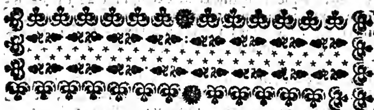
SCHOLIUM.

Aliquibus clarior visa est hujus problematis constructio, si dividatur per cogitationem circulus in quindecim partes aequales; hoc enim modo manifestum est, arcum AC quinque ex hujusmodi partibus continere, arcum vero AB tres; tum arcum BC duas, proindeque arcum CD unicam partem; ex quo fit, ut recta arcui CD subtensa sit latus pentedecagoni; *quod facere, & demonstrare oportebat*.

Propositio haec reliquis polygonis imparibus circulo inscribendis viam aperit. Nam quemadmodum multiplicando 3 per 5, productum 15 ostendit, quomodo ope duarum figurarum regularium, quarum altera sit trilatera, altera quinquelatera, figura quindecim laterum describi possit; ita multiplicando 3 per 7, productum 21 ostendit, quomodo possit inscribi circulo figura 21 laterum; & quamvis figurae 7 laterum circulo inscribendae methodus geometrica non extet, non deest tamen mechanica, praesertim adhibito circino proportionis, de quo inferius.

Finis Libri Quarti.

LI-



LIBER QUINTUS.



Uos hactenus explicuimus, Elementorum libri nihil aliud esse videntur, quam prima quædam Geometriæ rudimenta, ac veluti lineamenta, quibus ad altiora, atque occultiora Matheseos arcana paullatim dirigitur mens. Igitur ad pleniorem planarum figurarum cognitionem, quam sexto libro absolvit Euclides, utque ad solidorum naturam explicandam sibi viam aperiat, de Proportionibus generatim hoc in libro agit, cujus theoremata omnia nihil aliud fere videntur, quam universales quædam notiones, ac principia, quæ ad cujuslibet generis magnitudines applicari possunt. Nam hic non de solis lineis, aut angulis, aut cujusquumque generis figuris, sive planis, sive solidis, habenda est ratio; neque enim hujus generis magnitudines duntaxat inter se comparari possunt; sed de magnitudine in universum, quæ non solam quantitatem *continuam*, sed *numericam* etiam, immo momentorum, seu potentiarum motricium vires, & cujusquumque generis motus, circa quos versatur Mechanica, comprehendit. Ex quo quam ampla sit hujus libri materies intelligere licet, quam idcirco paullo aliter, ac ab aliis præstitum sit, explicare statu-

tuimus. Hinc non lineas in exemplum ad theorematum explicationem proferemus, quod alii Euclidis interpretes fecerunt; siquidem lineæ nonnisi ægre admodum ad omnis generis magnitudines significandas assumi possunt, nec animus fortasse ita persuasus esse censendus est, ut quod in lineis demonstratum videt, id æque certum, atque exploratum habeat, ac si, linearum loco, figuræ planæ, vel solidæ adhiberentur. Igitur non lineas, sed literas in exemplum afferemus, quibus numeros quandoque etiam adjungemus, non ut demonstrationum vim in numeris ponamus, quæ sine illis utique habebitur, sed ut tyronum captui, qui *Algebræ*, seu Arithmeticæ literalis, ideis, quæ nonnihil abstractæ videntur, parum sunt assueti, consulamus. Eam ob rem antequam hunc librum ordiamur, aliquam Algebræ notitiam præmittere haud incongruum judicavimus, explicando scilicet quatuor primas Arithmeticæ functiones, quæ per literas fiunt (siquidem eæ, quæ per numeros, seu per notas numericas fiunt, aliunde repeti poterunt, apud eos nempe, qui de Arithmetica ex instituto pertractant) Nemo autem miretur, nos brevem nimis, ac jejunam, ut ita dicam, Algebræ tractationem instituisse; nam ea solummodo in hoc Opere complecti libuit, quæ intra biennium philosophicum ab Imperialis Collegii Panormitani Adolescentibus, in quorum gratiam potissimum editum est, addiscenda sunt; quo exacto amplior, & uberior, quum Algebræ, tum reliquarum mathematicarum Disciplinarum eos manebit tractatio. In hac concinnanda Bernardum Lamyum auctorem potissimum sequuti sumus in eo opere, quod gallice inscripsit, *Elementa Mathematicorum*, sive *De magnitudine in genere tractatum*; quo sane opere, nihil est in hoc genere, quod clarius, & dilucidius, atque ad tyronum intelligentiam magis accommodatum, desiderari posse videatur.

§ I.

1. *Algebræ nomen Arabibus acceptum referri debere inconfesso est apud omnes; significat autem perfectiorem, seu excellentiorem quandam Arithmeticam, quæ ad problemata cujusquumque generis possibilia resolvenda adhibetur ope literarum alphabeti earum, quæ adlineas, angulos, & figuras omnes, sive planas, sive solidas, immo etiam ad varios motus, & ad potentiarum, seu momentorum vires, uno verbo, ad cujusquumque generis magnitudines significandas, assumi solent.*

2. *Etenim quum signa, seu notæ, quæ ad rem quamlibet significandam assumuntur, ab hominum arbitrio pendeant, neque aliam ob rem hæc nota* 3, *v. g. significet* tres, & 5 quinque, *nisi quia hominum consensus id significare voluit; hinc liberum est hominibus, quasquumque ipsis libuerit, notas adhibere (dummodo plures in signorum delectu conveniant) proindeque Arithmeticæ functiones, seu* operationes, *ut vocant, nimirum Additio, Subtractio, Multiplicatio & Divisio, alia ratione ab ea, qua vulgo fieri solet, peragi poterunt; id quod fit in Algebra, in qua literæ pro numeris habentur.*

3. *Quoniam igitur jam convenit inter Mathematicos recentiores hanc notam* = *significare æqualitatem, ubiquumque ea reperietur inter duas magnitudines, ut* a = b, *intelligent omnes significari,* a *esse æqualem* b. *Item quoniam statutum est, hanc aliam notam* + *significare* plus, *sive summam duarum magnitudinum; hinc ut fiat duarum, vel plurium magnitudinum additio, ut* a & b, *satis erit easdem magnitudines media hac nota* + *simul conjungere, scribendo hoc modo,* a + b; *ex quo manifestum erit, has magnitudines simul sumtas esse, atq; adeo idem erit* a + b, *ac* a *plus* b.

4. *Vicissim, quoniam hæc nota* − *significat* minus, *ut magnitudo aliqua ab alia subtrahatur, in*

qua contineri intelligitur, interposita inter utramque hac nota —, *hæc indicabit, posteriorem magnitudinem ab anteriore fuisse divulsam, sive unam sumi, alia detracta. Quemadmodum enim, si quis diceret, se habere* 10 *numos, demtis* 7, *seu* minus 7, *intelligeretur facta subtractio numeri* 7 *a* 10; *ita qui diceret* a, *demto* b, *sive* a minus b, *sive* a — b, *subtraheret alteram magnitudinem, nimirum* b, *ab altera, nempe ab* a.

5. *Item quoniam convenit jam, ut quotiesquumque duæ literæ, nulla interposita nota, conjunctæ sunt altera per alteram multiplicata esse intelligatur, si sint duæ literæ conjunctæ, ut* ab, *intelligent omnes, magnitudinem* a *esse per* b *multiplicatam, cujus multiplicationis productum est* ab. *Nonnulli ad multiplicationem significandam hanc notam* x *adhibendam esse volunt; consuetudo tamen invaluit ut literæ in multiplicatione simul conjungerentur, nulla interposita nota.*

6. *Divisio, quæ est quarta Arithmetices operatio, hoc pacto peragi solet, subscribendo nimirum magnitudinem dividentem ei, quam dividere oportet, interjecta linea. Ex. g. si dividenda sit* a *per* b, *scribendo* $\frac{a}{b}$ *jam indicatur,* a *esse divisam per* b.

7. *Hæc ratio Arithmeticas functiones per literas perficiendi, præter quam quod multo simplicior est, magis etiam late patet, quam ea, quæ fit per notas numericas; ea enim magnitudinibus* realibus, *ut vocant, &* positivis, *perinde ac* negativis, *applicari potest.* Magnitudinem positivam *vocamus eam, quæ reipsa extat, seu quæ ultra nihilum (si ita loqui licet) extenditur;* magnitudinem *vero* negativam *eam, quæ infra nihilum posita intelligitur. Ex. g. si quis possideat* 100 *numos, is magnitudinem positivam numorum habere dici potest. Qui vero nihil prorsus habens, insuper* 100 *numos alteri debet, is magnitudinem*

nem negativam numorum habere intelligi potest. Quare si hic homo significari ponatur per x, *ejus conditio hoc modo exprimi poterit*, x = 0 − 100; *sive* x + 100 = 0; *veluti si dicatur, centum numos ipsi deesse, ut ejus bona nihilo æqualia sint; vel centum numos ipsi necessarios fore, ut ejus bona sint nihilo æqualia.*

8. *Ex quo colligere possumus*, nihil, *sive, ut vulgo ajunt*, zero, *esse veluti medium inter magnitudinem positivam, & negativam; nam quemadmodum positiva exsurgit per additionem, quæ* nihilo *fieri concipitur, sic negativa non solum per subtractionem, quæ fit a positiva, sed etiam per subtractionem, quæ fit a nihilo. Hæc autem nota* +, *qua additio, & hæc alia* −, *qua subtractio significatur, id efficiunt, ut non solum parva quantitas a majore, id quod numeris fit, sed etiam major a minore subtrahi possit, quod solis Arithmeticæ notis fieri nequit; veluti si quis habens* 5 *numos deberet alteri* 8 *numos, ejus bona essent* 5 − 8, *proindeque minora nihilo. Utraque autem magnitudo, positiva scilicet, & negativa, in infinitum protenditur; ex quo fit, ut tum additio, tum subtractio in infinitum extendi possint. Quumque ambæ magnitudines sibi mutuo opponantur, tantum una minuitur, quantum augetur alia; hinc ut a magnitudine positiva quidpiam subtrahatur, nihil aliud requiritur, quam ut negativa ipsi opposita augeatur; quod subsequentibus paragraphis manifestum fiet; in quibus primum agemus de magnitudinibus incomplexis, quæ nulla nota sunt affectæ; postmodum de complexis.*

§ 2. *De Additione magnitudinum incomplexarum.*

1. *Additio, ut ex ipso nomine liquet, fit, quum magnitudo aliqua alteri adjungitur; sive quum duæ, vel plures magnitudines una simul accipiuntur; sive*

ſive etiam , quum inquiritur magnitudo aliqua, quæ duabus, vel pluribus magnitudinibus propoſitis æqualis ſit. Ex. g. addere 8 *ad* 12 *eſt ſumere* 8 *una ſimul cum* 12, *ſive inquirere numerum, qui utrique ſimul ſumto ſit æqualis, nimirum* 20.

2. *Quum magnitudo quælibet concipi poſſit, tanquam ex duabus, vel pluribus compoſita, ut hæc compoſitio exprimatur, literæ, quibus eas magnitudines ſignificare volumus, hac nota* + *ſunt jungendæ. Hinc ſi magnitudo aliqua duabus partibus conſtet, quarum altera ſit* a, *altera vero* b, *ſcribendum erit* a + b, *quæ magnitudo* complexa, *ſive* compoſita *dicitur, ea enim, quæ unica litera notatur* incomplexa, & ſimplex *appellatur*.

3. *Hinc colligitur in additione, quæ fit per literas, ſufficere, ut duæ, vel plures magnitudines propoſitæ per hanc notam* + *ſimul jungantur, ut* x + z, *quæ nota idem ſignificat, ac ſi dicatur* x *plus* z. *Cavendum tamen diligenter eſt, ne diverſi literas conjungendi modi ſimul confundantur, aut unus pro alio ſumatur; nam ſi quis, ut adderet* b *ad* c *ſcriberet* bc, *quoniam jam convenit inter Mathematicos, duas literas immediate ſibi contiguas multiplicationem ſignificare, non magnitudinem* b *additam magnitudini* c, *ſed* b *per* c *multiplicatam ſignificaret, quod longe diverſum eſt; nam* 2 *v. g. additum* 6 *facit* 8, *at* 2 *per* 6 *multiplicatum reddit* 12.

4. *Ubi plures magnitudines per additionem ſimul conjungere oportet, ſi eæ ſint ſimiles, nempe ſi iiſdem literis ſint expoſitæ, minui poterunt notæ, ſeu ſigna additionum; hinc quoniam* b+b+b+b *ſignificat magnitudinem* b *quater ſumtam eſſe, relictis additionis ſignis, ſic ſcribi ſolet* 4b, *quod idem omnino eſt, ac* b+b+b+b.

5. *Hic autem animadvertere oportet, quum notæ numericæ literas præcedunt, ut in allato exemplo, eas*

eas additionem significare; si vero post literas positæ sint, multiplicationem. Hinc 4b *significat* b *quater esse sumtum, at* b^4 *significat* b *esse quater multiplicatum. Igitur* 4b *significat* b+b+b+b; *at* b^4 *significat* bbbb.

6. *Quando literas nulla præcedit nota, subintelligitur semper nota positiva* + ; *quocirca* b *idem significat, ac* + b.

Exempla Additionis

Litera A significat magnitudines addendas; B vero summam.

A	a b c	5a 2a 3a	4f x 8f	a 2b	3c 4g	xb zc zc	2a a 3a
B	a+b+c	10 a	12f+x	a+2b	3c+4g	xb+2zc	6a

§ 3. *De subtractione magnitudinum incomplexarum.*

1. **S***ubtractio fit, quum ex magnitudine aliqua alia magnitudo aufertur. Ut si a* 14 *auferre velis* 9, *reliquum erit* 5. *Quo in exemplo* 14 *est* magnitudo, a qua subtrahitur, 9 *est* magnitudo subtrahenda; *id denique, quod superest, scilicet* 5, *vocatur* differentia, *sive* excessus *unius magnitudinis comparatæ ad aliam.*

2. *In ea subtractione, quæ solis notis numericis fit, ut supra advertimus* § 1. *n.* 8. *non potest magnitudo major a minori subtrahi; at in ea, quæ fit ope literarum, per hanc notam* — *quælibet magnitudo utique potest ab alia, quantumvis minore, subtrahi, immo ab ipso* nihilo, *quum quantitas negativa, quæ augetur per subtractionem positivæ, in infinitum, perinde ac positiva, protendi possit.*

3. *Si quis igitur magnitudinem* n *ab* m *subtrahere velit, interposita inter utramque literam notam nega-*

negativa hoc pacto, m − n, *confecta res erit; hoc namque modo intelligitur magnitudo negativa* n *a positiva* m *ablata fuisse. Siquidem meminisse oportet, quum literas nulla praecedit nota, hanc* + *semper esse subintelligendam.*

4. *Si eadem sit magnitudo positva, a qua subtrahere oportet, ac negativa, quae est subtrahenda, quando nempe iisdem literis notantur, ut fiat subtractio, tot literae erunt delendae in magnitudine positiva, quot reperiuntur in negativa, quaeque supererunt, erunt differentia, quae inquiritur. Ex. g. ut subtrahatur* 3d *a* 5d *scribendum est* 2d; *nam si a* 5d *auferas* 3d *superest* 2d, *quae est differentia utriusque magnitudinis.*

Exempla subtractionis.

A significat magnitudinem, a qua subtrahendum est; B vero magnitudinem, quam subtrahere oportet; C denique differentiam, sive id, quod superest post factam subtractionem.

A	4d	c	b	3m	ab	− 3a
B	d	c	d	4n	cd	− 5a
C	3d	o	b − d	3m − 4n	ab − cd	+ 2a

5. *Subtractio magnitudinis negativae ab alia magnitudine item negativa fit per addittionem magnitudinis positivae, ut patet in ultimo exemplo; si enim quis debeat alteri tres numos, atque ab hac summa quam debet, subtrahas quinque numos, trium numorum debitum evanescet, & insuper ipsi fiet duorum numorum additio, quae per* + 2a *significatur.*

§. 4. *De multiplicatione magnitudinum incomplexarum.*

1. M*Ultiplicatio unius magnitudinis per aliam fit, quum una toties repetitur, vel sibi ipsi adjungitur, quot sunt unitates in alia. Itaque multiplicare ex. g. 7 per 5 est sumere quinquies 7; numerus 7 dicitur* quantitas multiplicanda, 5 *est* quantitas, *seu* numerus multiplicator; *numerus vero* 35, *qui ex hac multiplicatione exsurgit, dicitur* productum.

2. *In multiplicatione, quæ fit per literas, nihil aliud requiritur, quam ut magnitudines multiplicandæ simul jungantur, nulla interjecta nota, vel signo. Hinc* bc *significat*, b *esse multiplicatum per* c. *Ut multiplicetur* a *per* 4 *scribendum est* 4a. *Si literis adjunctæ sint notæ numericæ, quæ literas præcedunt, eæ pariter sunt multiplicandæ, junctisque literis, productum numerorum est iisdem apponendum. Itaque ut multiplicetur* 3b *per* 4d, *debet prius multiplicari* 4 *per* 3, *tum productum* 12 *addendum est duabus literis* b, *&* d *hoc modo*, 12bd. *Secus dicendum est, si alteri tantum literæ apposita sit nota numerica, ea enim immultiplicata producto apponitur.*

3. *Quum magnitudo aliqua bis, aut pluries per se ipsa multiplicatur, ne eadem litera sæpius repetatur, adjungenda ipsi est ad dexteram legentis nota numerica, quæ indicet, quoties ea magnitudo multiplicata sit. Sic, quoniam multiplicando* b *per* b, *productum est* bb, *quod per* b *item multiplicatum efficit* bbb, *ut minuatur numerus literarum, scribi solet* b^2 *loco* bb, *&* b^3 *loco* bbb, *itaut nota numerica paullo altius ipsa litera sit notata. Ex quo colligitur, aliud significare* b^3 *aliud vero* 3b; *siquidem* 3b *significat*, b *esse sibi ter additam, adeoque idem est, ac*

b + b + b; b^3 *vero significat*, b *ter esse per se ipsum multiplicatam, proindeque idem est, ac* bbb. *Quare si ponatur* b *valere* 3, *idem erit* 3b *ac ter* 3, *videlicet* 9; *at* b^3 *erit idem, ac* 27. *Si enim multiplices* 3 *per* 3 *dabunt* 9, *quod productum si per* 3 *iterum ducas, habebis* 27. *Igitur quotiesquumque nota numerica praecedit literam, significat additionem, quum vero subsequitur, significat multiplicationem.*

Exempla Multiplicationis.

A significat magnitudines multiplicandas;
B *vero productum.*

A	a b	a a	b 2b	aa ab	2a 3b	2b c	3ab 2cd	$6a^3$ $2a^3$
B	ab	aa, *vel* a^2	2bb	a^3b, *sive* aaab	6ab	2bc	6abcd	$12a^6$

4. *Ratio, cur in ultimo exemplo quantitas* $6a^3$ *multiplicata per* $2a^3$ *det productum* $12a^6$ *est, quia quum dictum sit n.* 3, *idem esse* a^3 *ac* aaa, *manifestum est, si multiplices* 6aaa *per* 2aaa, *productum esse* 12aaaaaa, *quandoquidem* 6 *per* 2 *dat* 12; & aaa *per* aaa *dat* aaaaaa, *sive* a^6.

5. *Diximus n.* 2, *numeros tantum, qui literas praecedunt, esse multiplicandos; nam ii, qui literas sequuntur, quique* exponentes *dicuntur, minime multiplicandi sunt, sed tantum eorum summa per additionem colligenda; etenim additio numerorum exponentium multiplicationem significat. Id autem in superiori exemplo patet, & inferius etiam constabit.*

§. 5. *De Divisione magnitudinum incomplexarum.*

1. D*ivisio fit, quum inquiritur quoties magnitudo aliqua in alia contineatur; sic dividere* 15 *per* 3 *est inquirere quoties* 3 *contineatur in* 15, *nimirum quinquies; quo in exemplo* 15 *dicitur* magnitudo dividenda, 3 magnitudo dividens, *sive absolute* divisor, 5 *denique vocatur* quotiens.

2. *Ut fiat divisio per Algebram, sufficit subscribere magnitudinem dividentem alteri dividendæ, interposita linea; veluti si* a *per* b *dividere oporteat, scribatur* $\frac{a}{b}$, *quo facto apparebit* a *divisam esse per* b.

3. *In qualibet divisione si divisor per quotientem multiplicetur, productum debet esse magnitudini dividendæ æquale, alias enim divisio vitiosa foret. Hinc ut cognoscamus, an* 5 *sit quotiens numeri* 15 *divisi per* 3, *multiplicari debet divisor* 3 *per quotientem* 5; *quorum productum si sit æquale numero dividendo* 15, *optima erit divisio. Idipsum in divisione, quæ fit per literas observandum est. Si enim proponatur magnitudo* ab *dividenda per* a, *manifestum est, quotientem hujus divisionis esse* b, *quia si multiplices* b *per* a, *productum* ab *æquale erit magnitudini propositæ.*

4. *Hinc erui potest regula generalis pro divisione, quæ in hoc posita est, nimirum*, sublatis a magnitudine dividenda literis, quæ sunt in divisore, id quod superest erit quotiens divisionis. *Juxta quam regulam, ut dividatur* bcd *per* cd, *sublatis a* bcd *duabus literis* cd, *litera* b, *quæ superest, erit quotiens divisionis; si enim multiplices divisorem* cd *per* b, *productum* bcd *æquale erit magnitudini propositæ.*

5. *Si literis notæ numericæ sint appositæ, eæ pariter erunt dividendæ, earumque quotiens notandus.*

Quare ut dividatur 6bb *per* 2b, *oportet, ut dividatur primum* 6 *per* 2, *cujus divisionis quotiens erit* 3; *tum* bb *per* b, *cujus quotiens erit* b *Ex quo colligitur* 3b *esse quotientem magnitudinis* 6bb *divisæ per* 2b; *nam multiplicando* 3b *per* 2b *productum* 6bb *æquale erit magnitudini propositæ*.

Exempla divisionis.

A *indicat magnitudinem dividendam*, B *divisorem*, C *vero quotientem divisionis*.

A	ab	aa	a^3	abc	a^3b	6ab
B	a	a	a	a	a^2b	3b
C	b	a	a^2	bc	a	2a

6. *In omnibus hisce divisionibus, ut cognoscatur, an divisio recta sit, nec ne, multiplicandus est quotiens per divisorem; quo facto, si productum æquale sit magnitudini dividendæ, optima erit divisio; secus erit vitiosa. Hinc ut cognoscatur an* a *sit quotiens magnitudinis* a^3b, *sive* aaab *divisæ per* a^2b, *seu* aab, *multiplicari debet* aab *per* a, *quo facto apparebit, productum* aaab *æquale esse magnitudini propositæ*.

Si magnitudo aliqua per se ipsam dividatur, quotiens erit 1; *nam omnis magnitudo semel tantum in seipsa continetur*.

§. 6.

§. 6. De Additione magnitudinum complexarum.

1. HUcusque de magnitudinibus incomplexis egimus, quæ nimirum nulla nota, vel signo sunt affectæ, quæque idcirco monomæ appellantur; reliquum est, ut de complexis, quæ polynomæ dicantur, agamus. Et sane ad complexarum additionem quod attinet, hæc eodem modo fit, ac simplicium; complexæ enim magnitudines, perinde ac simplices, simul conjunguntur interposita additionis nota +. Hinc si addere velis c + d ad f + g hoc modo utraqua magnitudo conjungenda est, c + d + f + g; si vero adjungere velis a + d ad c — b, scribe a + d + c — b.

2. Quum magnitudo aliqua sibi ipsa est addenda, minui solent signa additionis, apposita nota numerica, qua indicetur, quoties ea magnitudo sumatur; quo pacto expressio simplicior, & facilior erit. Hinc, ut addatur c + d ad c + d, scribi solet 2c + 2d; similiter ut addatur c — d ad c — d, scribendum est 2c — 2d, quod idem est, ac c — d + c — d.

3. Si magnitudines, quas conjungere oportet, sint similes, at notis oppositis sint affectæ, literæ similes oppositis notis affectæ sunt delendæ, nam notæ, seu signa opposita sese mutuo destruunt. Hinc ut addatur 2a + 2b ad 3a — 2b, scribendum est tantummodo 5a; etenim + 2b — 2b nihil est.

4. Id igitur tanquam axioma tenendum est, scilicet: quotiesquumque occurrit eadem magnitudo oppositis notis affecta, nimirum +, & —, quæ sese mutuo destruunt, eam esse omnino delendam in additione. Quod si ex duabus magnitudinibus similibus contrariis notis affectis altera maior sit, altera minor, quoniam in eo casu ambæ sese omnino non destruunt, excessus majoris duntaxat notandus est eo ipso signo, quo magnitudo major antea erat affecta. Ex.g. si facienda

da sit additio duarum magnitudinum $4a + 6b$, *&* $3a - 4b$, *summa erit* $7a + 2b$; *nam quum magnitudo negativa* $-4b$ *æqualem sibi partem a positiva* $+6b$ *elidat, manifestum est* $+2b$ *duntaxat superesse.*

Exempla additionis.

A *signat magnitudines addendas*; B *vero summam.*

A	$a + 3b$	$2a - b$	$aa - 5a + b$	$a - d$
	$a + 2b$	$3a - 3b$	$aa + a - b$	$a + 4d$
B	$2a + 5b$	$5a - 4b$	$2aa - 4a$	$2a + 3d$

A	$cc + 2c - 3$	$2a^3 + b^2 + 3.$	$3a + 4b - 6c$
	$cc + c - 6$	$a^3 + b^2 - 2.$	$4a - 2b - 3c$
			$7a + 12b + 2c$
B	$2cc + 3c - 9$	$3a^3 + 2b^2 + 1.$	$14a + 14b - 7c$

A	$20m + 10n + 40x$	$100a + 57b - 13f$
	$m - 30n - 20x$	$157a - 60b + 27f$
	$40m + 9n + 50x$	$1000a + 13b + 2f$
B	$61m - 11n + 70x$	$1257a + 10b + 16f$

§. 7. *De subtractione magnitudinum complexarum.*

1. *IN magnitudinum complexarum subtractione, non secus ac simplicium, hac nota* — *uti solent Mathematici, qua una magnitudo ab alia subtracta esse significatur. Ut igitur subtrahatur* b + d *a* c + f *debet prius a* c + b *sutrahi* b *hoc modo* c + f — b; *quumque non sola magnitudo* b *sit subtrahenda, sed etiam* + d, *ambæ subtractiones binis subtractionis notis sunt exprimendæ hoc pacto* c + f — b — d

2. *Diximus supra magnitudines positivas per subtractionem evadere negativas; quocirca hæc regula generatim statui potest, nimirum in omni subtractione notas magnitudinis subtrahendæ esse mutandas, quare si sit affecta notis positivis, hæ in negativas sunt mutandæ, & vicissim. Et quoniam in magnitudine, quæ nulla præcedenti nota est affecta, semper subintelligitur nota positiva* +; *hinc ut subtrahatur* b + d *seu* + b + d *a* c + f, *ambæ notæ positivæ* + b + d *sunt in negativas hoc modo* — b — d *commutandæ, scribendo scilicet* c + f — b — d.

3. *Vicissim quando in magnitudine subtrahenda nota negativa* — *reperitur, veluti si* + b — d *subtrahenda sit a* c + f, *ambæ notæ item sunt in oppositas mutandæ hoc modo,* c + f — b + d. *Siquidem subtrahere a* c + f *magnitudinem* b — d *non est subtrahere totam* b, *nam ab hac subtractione excipitur* d, *quæ intelligitur esse pars magnitudinis* b. *Unde si quis scriberet* c + f — b, *subtraheret a* c + f *plus eo, quod propositum est, nimirum magnitudinem* d, *quæ per notam* — *fuerat excepta; quocirca hæc addenda est excessui, seu differentiæ, apposita nota positiva* +; *proindeque facta subtractione magnitudinis* b — d *a* c + f, *quod superest erit* c + f — b + d.

4. *Ut autem hæc operatio, quoad ejus fieri potest,*

test, brevis sit, & simplex, ubi occurrunt magnitudines similes, minuendæ sunt notæ, seu signa; id quod etiam in additione fieri solere monuimus. Quare si magnitudines similes oppositis notis sint affectæ, ex supposi ni, ac deleri poterunt in subtractione; etenim + a − a *æquivalet* o, *seu nihilo. Itaque ut subtrahatur* + c + f *ab* c + d + f, *id quod superest, erit* c + d + f − c − f; *at quoniam duæ literæ* c, & f, *quæ notis oppositis sunt affectæ, sese mutuo destruunt (quandoquidem* + c − c, & + f − f *nihil valent) eæ deleri poterunt, proindeque facta subtractione remanebit* d.

5. *Si subtrahatur* a − b *a* 3a + b, *juxta generalem subtractionis regulam n.* 3. *expositam remaneret* 3a + b − a + b; *at quoniam* 3a − a *idem est, ac* 2a, & *insuper* + b + b *idem est, ac* 2b, *subtractio sic exponi poterit*, 2a + 2b, *quod idem est, ac* 3a + b − a + b, ut patet.

6. *Si subtrahatur* a + 3b *ex* 3a + 2b *juxta eandem generalem regulam remanet* 3a + 2b − a − 3b; *at quoniam* 3a − a *idem est ac* 2a, & *insuper* + 2b − 3b *idem est, ac* − b, *si notetur*, 2a − b, *idem erit, ac* 3a + 2b − a − 3b.

7. *Ut subtrahatur* 3a − 3b *ex* 5a − 4b, *juxta eandem regulam generalem supererit* 5a − 4b − 3a + 3b. *At quoniam* 5a − 3a *idem est, ac* 2a, & *insuper* − 4b + 3b *idem ac* − b; *hinc* 2a − b *idem erit, ac* 5a − 4b − 3a + 3b.

8. *Sit data hæc magnitudo* 5a + 2b, *a qua subtr hi debet* 4a + 6b; *aufer primum* 4a *ex* 5a, *remanebit* a; *deinde subtrahe* 6b *ex* 2b; *quod quum fieri nequeat, nam* 6b *minime continetur in* 2b, *deleri debet* 2b, & *quod superest, scilicet* 4b *subtrahendum est ab* a *hoc modo* a − 4b, *quod idem erit ac* 5a + 2b − 4a − 6b.

Exempla subtractionis.

A *significat magnitudines subtrahendas*; B *vero excessum, seu id, quod superest facta subtractione.*

A	$2a + 5b$	$5a - 4b$	$3a + 2b$	$2a + b$
	$a + b$	$3a - 3b$	$a + 3b$	$a - b$
B	$a + 4b$	$2a - b$	$2a - b$	$a + 2b$

A	$3a + d$	$2aa + 3a + 9$	$25a + 12b - 14d$
	$2a + 5d$	$aa + 2a - 3$	$12a + 8b + 10d$
B	$a - 4d$	$aa + a + 12$	$13a + 46 - 24d$

A	$30m - 19n - 50x + 10y$	$4f - 2g - 2m + 4$
	$20m - 12n + 14x + 20y$	$3f + 4g - 5m + 8$
B	$10m - 7n - 64x - 10y$	$f - 6g + 3m - 4$

9. *Si quis dubitet, an in hisce exemplis recte facta sit subtractio, nec ne, poterit utramque magnitudinem, nimirum eam, a qua fit subtractio, & eam, quæ subtrahenda est, per extensum notare, juxta regulam superius propositam n.* 2. & 3, *sicque subtractionum rectitudinem comperiet.*

10. *Uti etiam possumus additione ad cognoscendam rectitudinem subtractionis; siquidem additio, & subtractio sibi mutuo dant manum, & altera per alteram probatur, & viciſſim. Hinc ut sciamus, an in penultimo exemplo recte facta sit subtractio, fiat magnitudinis subtractæ ad subtrahendam additio; quod si earum summa magnitudini propositæ æqualis erit, recta erit subtractio. Quoniam igitur* + 10m *additum ad* + 20m *dat* + 30m; *deinde* − 7n *additum ad*

— 12n *dat* — 19n; *tum* — 64x *additum ad* + 14x *dat* — 50x; *juxta id, quod dictum est* §6, *n.* 4; *Denique quoniam* — 10y *additum ad* + 20y *dat* + 10y, *juxta eandem regulam, hinc patet, rectam esse subtractionem.*

11. *Juvat igitur hic repetere, quod supra dictum est, nimirum, ut simul conjungantur per additionem duæ, vel plures magnitudines complexæ, nihil aliud requiritur, quam ut una post aliam scribatur interposita hac nota* + *cum iisdem notis, seu signis, quibus antea erant affectæ. Ut autem magnitudo complexa ab alia subtrahatur, debet illa post hanc notari, mutatis notis, quibus magnitudo subtrahenda ante erat affecta, in notas oppositas, quæ tamen notæ pauciores reddi poterunt juxta methodum n. 4. propositam.*

Ex. g. si addere velis 3a + 4c — 5b + 8 *ad* 4a — 2c — 2b + 4; *scribe* 3a + 4c — 5b + 8 + 4a — 2c — 2b + 4; *quæ quidem summa ad hanc reduci potest* 7a + 2c — 7b + 12.

Si vero subtrahere velis 3a + 4c — 5b + 8 *ab* 4a — 2c — 2b + 4; *scribe* 4a — 2c — 2b + 4 — 3a — 4c + 5b — 8; *quæ quidem differentia erit æqualis huic* a — 6c + 3b — 4.

12. *Nota nihil necesse esse in his operationibus, ut termini, seu magnitudines similes similibus subscribantur, id enim ea tantum de caussa in exemplis propositis factum est, ut easdem operationes oculis subjiciendo faciliores captu tyronibus redderemus.*

§. 8.

§. 8. *De multiplicatione magnitudinum complexarum.*

1. *Magnitudinum complexarum multiplicatio eodem fere modo fit, ac multiplicatio numerorum item complexorum. Quemadmodum igitur in numerorum complexorum multiplicatione qualibet nota numerica multiplicatoris per omnes notas numeri multiplicandi multiplicari debet, proindeque tot debent esse multiplicationes partiales, quot sunt numeri in multiplicatore; ita in magnitudinibus complexis termini omnes magnitudinis multiplicandæ per singulos terminos multiplicatoris sunt multiplicandi; quarum multiplicationum partialium summa postremo est colligenda, ut habeatur productum multiplicationis.*

2. *Si igitur multiplicare velis* a + b *per* x, *duo termini* a *&* b *seorsum sunt multiplicandi per eundem multiplicatorem* x; *deinde utriusque multiplicationis summa colligenda hoc modo*, xa + xb. *Si vero magnitudo complexa* a + b *per* x + z *item complexam multiplicanda sit, quatuor multiplicationes fieri oportet, nimirum* xa + xb + za + zb. *Omnes autem casus hujusmodi multiplicationis tribus regulis comprehendi possunt.*

3. *Prima regula est*; plus per plus reddit plus; idest, quotiesquumque magnitudines multiplicandæ nota positiva + sunt affectæ, earum productum eadem nota + affectum esse debet. *Quocirca multiplicando* b + d *per* x + z *productum erit* xb + xd + zb + zd.

4. *Altera regula est*: plus per minus reddit minus; idest, si altera ex duabus magnitudinibus multiplicandis hac nota +, altera vero hac alia − sit affecta, productum nota negativa − erit affectum. *Sic si multiplices* b − c *per* a *seu* + a *productum erit* ab − ac. *Cujus rei ratio impromptu est. Siquidem*

dem quum multiplicare oportet b — c *per* a, *non tota magnitudo* b, *sed pars duntaxat est multiplicanda, nimirum* b, *demto* c, *quæ est pars magnitudinis* b. *Dum autem scribis* ab, *intelligitur multiplicata per* a *magnitudo* b *una cum* c, *adeoque multiplicatum est plus eo, quod multiplicare debebas. Cui excessui ut modus ponatur, toties magnitudo* c *est resecanda a producto* ab, *quoties per multiplicatorem* a *ipsi fuit addita; unde debet subtrahi a producto* ab *una cum multiplicatore* a, *scribendo scilicet* ab — ac.

5. *Si igitur multiplicandum sit* b + d *per* x — z *productum erit* xb + xd — zb — zd. *Ratio est, quia quum multiplicatur* b + d *per* x — z, *magnitudo* b + d *non multiplicatur per totam magnitudinem* x; *superest enim* z, *quod a multiplicatore* x *intelligitur subtractum; proindeque multiplicato* b + d *per* x, *productum* xb + xd, *excedit productum, quod inquiritur, magnitudine* b *multiplicata per* z, *& simul magnitudine* d *multiplicata item per* z; *adeoque productum* zb + zd *subtrahendum est eo, quo diximus modo*.

6. *Ut clarius id intelligatur ponamus* b *valere* 6, d *vero* 8, x *autem* 4, z *denique* 2. *Erit igitur* 6 + 8 *multiplicandus per* 4 — 2. *Si ergo multiplices* 6 + 8, *nimirum* 14, *per* 4; *evidens est, productum* 56 *excedere productum, quod inquiritur, tota summa* 6 + 8, *seu* 14, *multiplicata per* 2, *quæ pars a multiplicatore* 4 *fuit subtracta, proindeque a producto* 56 *auferenda est magnitudo* 14 *multiplicata per* 2, *nimirum* 28; *quocirca hujus multiplicationis productum erit* 56 — 28.

7. *Tertia regula est*: minus per minus reddit plus. *Igitur si magnitudines multiplicandæ ambæ nota negativa — sint affectæ, productum postrema sui parte nota positiva + affectum erit. Si igitur multiplices* b — d *per* x — z *productum erit* xb — xd — zb + zd.

Ra-

Ratio est, quia hic non multiplicatur b — d *per totam* x, *alias multiplicaretur etiam* z, *quæ est pars* x *ab eadem* x *subtracta; quare productum* + xb — xd *excedit productum, quod inquiritur, proindeque nonnihil ab eo est auferendum; non est autem auferendum totum productum* bz, *nam non tota magnitudo* b *multiplicata est per* x — z, *sed tantum* b — d; *quare postquam notatum est* xb — xd — zb, *addendum est per notam positivam* + *productum* zd, *quod per* — zb *plus æquo fuit subtractum; quare scribendum est* xb — xd — zb + zd.

8. *Quod ut clarius innotescat, ponatur* b *valere* 5, d *vero* 2; *quare idem erit* b — d *ac* 5 — 2, *sive* 3. *Insuper statuatur* x *esse* 4, z *vero* 1; *unde idem erit* x — z *ac* 4 — 1, *sive* 3. *Igitur dum multiplicatur* 5 — 2 *per* 4 — 1, *non multiplicatur totum* 5 *per totum* 4, *sed pars duntaxat, nimirum* 3 *per* 3. *Proinde postquam sriptum est* 20 — 8 — 5, *quoniam per* — 5, *plus æquo a producto subtractum est, addendum est ipsi productum numeri* 2 *multiplicati per* 1, *nimirum* 2, *hoc modo*, 20 — 8 — 5 + 2 *quod æquivalet* 9, *quod est productum* 5 — 2, *seu* 3, *multiplicati per* 4 — 1, *seu* 3.

9. *Ex quo generatim inferri potest*, — *per* — *reddere* +, *sic multiplicando* — a *per* — b *productum erit* + ab. *Ratio impromptu est, quod scilicet dum multiplicatur magnitudo negativa* — a *per* — b *item negativam, toties prior* — a *subtrahitur, quot sunt unitates in* b. *Quum autem subtractio magnitudinis negativæ, ut superius monuimus, fiat per additionem positivæ, hinc sublata negatione, poni debet affirmatio, proindeque productum nota affirmativa, seu positiva* + *affectum esse debet.*

Exem-

Exempla multiplicationis.

A significat magnitudines multiplicandas; B multiplicationes partiales; C denique earundem multiplicationum summam, nimirum totum productum.

A	$4a + 12b + 8f$
	$5a - 3b + 4f$
B	$20aa + 60ab + 40af - 36bb - 24bf + 32ff$
	$- 12ab + 16af + 48bf$
C	$20aa + 48ab + 56af - 36bb + 24bf + 32ff$

Hoc exemplum sic explicatur. Multiplicetur primum $+ 4a$ *per* $+ 5a$, *productum erit* $+ 20aa$. *Deinde multiplicetur* $+ 12b$ *item per* $+ 5a$, *productum erit* $+ 60ab$, *tum multiplicetur* $+ 8f$ *per* $+ 5a$, *productum erit* $+ 40af$. *Secundo, multiplicetur* $+ 4a$ *per* $- 3b$, *productum erit* $- 12ab$, *juxta secundam regulam; deinde multiplicetur* $+ 12b$ *item per* $- 3b$, *productum erit* $- 36bb$; *denique multiplicetur* $+ 8f$ *per* $- 3b$ *productum erit* $- 24bf$. *Tertio, multiplicetur* $+ 4a$ *per* $+ 4f$, *productum erit* $+ 16af$; *deinde multiplicetur* $+ 12b$ *per* $+ 4f$, *productum erit* $+ 48bf$; *denique multiplicetur* $+ 8f$ *per* $+ 4f$, *productum erit* $+ 32ff$. *Quorum omnium productorum summa erit* $20aa + 48ab + 56af - 36bb + 24bf + 32ff$.

Alterum Exemplum

A	8m − 4n − 20x 4m − 2n − 40x
B	32mm − 16mn − 80mx + 8nn + 40nx + 800xx − 16mn − 320mx + 160nx
C	32mm − 32mn − 400mx + 8nn + 200nx + 800xx

10. *Ut facilius, peracta multiplicatione, fiat summa multiplicationum partialium, si occurrant binæ, vel plures magnitudines similes, una alteri est subscribenda. Hac de caussa magnitudo* − 16mn *subscripta est alteri* − 16mn; *itemque alia* 320mx *alteri* 80mx *subscripta cernitur in exemplo.*

11. *Quum magnitudines multiplicandæ iisdem literis constant, minui poterunt, tum notæ, tum literæ, juxta methodum alibi propositam. Ex. g. productum magnitudinis* a + b *multiplicatæ per* a − b *est* aa + ab − ab − bb; *at quoniam* + ab − ab *nihil est; igitur ambæ deleri poterunt, & productum erit* aa − bb. *Vicissim productum* a − b *multiplicatæ per* a − b *est* aa − ab − ab + bb; *at quoniam* − ab − ab *idem est, ac* − 2ab, *scribe* aa − 2ab + bb.

§. 9.

§. 9. *De divisione magnitudinum complexarum.*

1. *Quemadmodum subtractio additioni, ita divisio multiplicationi opponitur; unde additio quidem per subtractionem, & vicissim, multiplicatio vero per divisionem, & viceversa, probantur. Si enim multiplicationis productum per multiplicatorem dividatur, & quotiens divisionis æqualis sit magnitudini multiplicandæ, recta erit multiplicatio; & vicissim si, multiplicato divisore per quotientem, productum æquale sit magnitudini dividendæ, rectam fuisse divisionem apparebit. Vide quæ diximus §. 5. n. 3.*

Quoniam igitur 7 multiplicatum per 5 dat productum 35, manifestum est, 7 esse quotientem numeri 35 divisi per 5. Item quoniam x + z *multiplicata per* b + d dat productum xb + xd + zb + zd, *manifestum est* x + z, *esse quotientem magnitudinis* xb + xd + zb + zd *divisæ per* b + d.

2. *Quocirca regulæ multiplicationis in mentem sunt revocandæ. Quoniam igitur in multiplicatione* plus per plus reddit plus, *si tum magnitudo dividenda, tum divisor hac nota + sint affecta, quotiens pariter eadem nota affectus esse debet. Quare si proponatur magnitudo* ac + ad + bc + bd *dividenda per* a + b, *quotiens hujus divisionis erit* c + d.

3. *Quoniam autem* plus per minus reddit minus, *si magnitudo dividenda ultima sui parte nota negativa − sit affecta, divisor autem nota positiva +, quotiens nota negativa − affectus esse debet. Si vero divisor etiam nota negativa − sit affectus, quotiens nota positiva erit notandus. Sic si proponatur magnitudo* xb + xd − zb − zd *dividenda per* x − z, *quotiens erit* b + d; *nam multiplicando* b + d *per* x − z, *productum æquale est magnitudini propositæ. Si vero*

ea-

eadem magnitudo xb + xd − zb − zd *dividenda sit per* b + d, *quotiens erit* x − z; *si enim multiplices* b + d *per* x − z, *productum* xb + xd − zb − zd *reddet*.

4. *Si magnitudo dividenda extrema sui parte nota positiva* + *sit affecta*, *divisor vero nota negativa* −, *quotiens eandem notam* − *habebit*; *hinc dividendo* xb − xd − zb + zd *per* x − z, *quotiens erit* b − d.

Exempla divisionis

A *signat magnitudinem dividendam*; B *divisorem*; C *denique quotientem*.

A	30xb + 18xd + 20zb + 12zd	C 5b + 3d
B	6x + 4z	
A	15xb + 20zb − 18xd − 24zd	C 5b − 6d.
B	3x + 4z	
A	20bm − 8bn − 15dm + 6dn	C 4b − 3d.
B	5m − 2n	

In omnibus his divisionibus multiplicato divisore per quotientem, *productum debet esse aequale magnitudini dividendae*; *secus enim vitiosa foret divisio*.

5. *Exempla*, *quae posuimus*, *docent quomodo fiat divisio*, *ubi termini omnes divisoris in magnitudine dividenda reperiuntur*. *Quod si divisoris termini in ea non reperiantur*, *tunc divisio fit subscribendo divisorem magnitudini dividendae*, *interposita linea*. *Hinc si dividatur ex. g.* ab + cd *per* x + z *quotiens erit*

$$\frac{ab + cd}{x + z}$$

6. *Atque hae sunt quatuor Algebrae operationes*, *quas breviter explicare conati sumus*, *ac appositis exemplis illustrare*, *paucis quidem*, *iisque facilioribus*

tibus, sed quibus tamen bene intellectis, facile quisque alia, & alia sibi ipsi proponere, & proprio marte explicare poterit. Quocirca id præceptoris erit, ad exercenda discipulorum ingenia (quod maximi in hac re est momenti) plura harum operationum exempla identidem explicanda proponere, ut promptius, & facilius omnes Algebræ functiones ipsi per se peragere, easdemque in libris, in quibus extant, intelligere valeant.

7. *Hic ultimo monendum censeo, longe diversam esse rationem numerorum, ac literarum alphabeticarum. Siquidem numerorum valor ab ordine, quo notæ numericæ distribuuntur potissimum pendet; ex g. in hoc numero* 32 *nota posterior, quæ est ad dexteram legentis, scilicet* 2, *duas unitates significat, anterior vero* 3 *tres decades, seu triginta unitates. Unde si ordo invertatur scribendo hoc modo* 23, *manifestum est, has ipsas notas aliud significare. At vero literæ idem omnino præstant, quoquumque ordine collocentur; proindeque idem valet* ab, *ac* ba, *idemque* a + b, *ac* b + a. *Hinc tamen non sequitur, idem esse* a − b, *ac* b − a, *non ob ordinis, seu loci diversitatem, sed propter diversitatem notæ, quibus eæ afficiuntur; nam* a − b *idem valet, ac* + a − b; *at vero* b − a *idem, ac* + b − a; *patet autem,* + a − b *non idem esse* + b *ac* + b − a

Algebram veteres etiam excoluisse constat; ea tamen a nostra multum diversa fuit. Veterum namque notæ, seu signa, & numero plura, & varie, tum inter sese, tum notis numericis permixta confusam, adeo, & captu difficilem disciplinam hanc efficiebant, ut ab ejus studio omnes fere deterrerentur. Ea autem, quæ modo in usu est, viro summo, nullique ex celebrioribus cujuslibet ævi Philosophis secundo, Renato Cartesio referri debet accepta, quem idcirco, non Philosophiæ modo, sed etiam Matheseos restauratorem jure optimo dixeris.

§. 10.

§. 10. De variis magnitudinum gradibus.

1. *Magnitudines omnes in varios gradus distribui possunt, quos* potentias *communiter vocant. Quocirca* potentiæ *nomine hic intelligitur id, quod magnitudo aliqua, vel per se ipsam, vel per aliam multiplicata efficere, aut præstare potest. Hinc quum qualibet magnitudo semel, bis, ter, quater &c. possit multiplicari, varii inde exsurgere possunt potentiarum gradus, per quos magnitudines unius, vel plurium dimensionum significantur.*

2. *Diximus supra §. 1. literas ad cujusquumque generis magnitudines significandas assumi posse, potissimum tamen, dum ad figuras planas, & solidas significandas assumuntur, pro planis, & solidis rectangulis accipi solent. Si unica tantum litera adhibeatur, ut* a *vel* b *&c. hæc magnitudinem unius dimensionis duntaxat significabit, nimirum lineam; hæc autem* potentia primi gradus, *seu* prima *appellatur.*

3. *Si duæ literæ simul multiplicentur, ut* a *per* b, *productum* ab *magnitudinem duarum dimensionum significabit, nimirum* parallelogrammum rectangulum, *cujus alterum latus erit* a, *alterum vero* b. *Hæc autem dicitur* secunda potentia. *Si sint duæ literæ similes, ut* aa, *planum erit* quadratum, *cujus radix quadrata erit* a.

4. *Si vero sint tres literæ simul multiplicatæ, ut* abc, *hæ magnitudinem trium dimensionum, nimirum solidum rectangulum dabunt, quod* parallelepipedum *dicitur, cujus longitudo v. g. est* a, *latitudo vero* b, *altitudo denique* c. *Etenim si* a *sit* 2, b *vero* 3, c *denique* 4, *multiplicando* a *per* b, *sive* 2 *per* 3, *productum dabit rectangulum* ab, *sive* 6, *quod erit basis parallelepipedi; si vero multiplices denuo idem productum* ab *per* c, *sive* 6 *per* 4, *habebis solidum* abc, *sive* 24. *Quum enim multiplicatur basis* ab *per* c, *tantum supra*

 sei-

seipsam elevari intelligitur, quantum altitudo c, *quæ lineam significat, ut n.* 2 *dictum est, extenditur. Hæc autem dicitur* potentia tertii gradus, *sive* tertia potentia.

5. *Ubi tres literæ similes sunt, ut* aaa, *hoc genus parallelepipedi* cubus *vocatur, cujus omnes dimensiones sunt æquales; si enim multiplices* 2 *per* 2, *productum erit quadratum* 4, *quod exprimitur per* aa; *quod si idem quadratum* aa *per suam radicem* a, *seu per* 2 *denuo multiplices, productum dabit cubum* aaa, *seu* 8, *cujus radix cubica est* a.

6. *Si plures, quam tres literæ simul multiplicentur, hæ magnitudinem exhibebunt pluribus, quam tribus dimensionibus contentam, quæ sane magnitudo imaginaria est, si in quantitate continua fingatur, quum nullum corpus sit, quod pluribus, quam tribus dimensionibus constet. Itaque si quatuor sint literæ, ut* abcd, *hæ dabunt* quartam potentiam, *atque ea magnitudo* plano-planum *vocabitur, quoniam, ex plano* ab *per planum* cd *multiplicato consurgit. Si literæ omnes similes sint, ut* aaaa, quadrato-quadratum *appellabitur, cujus radix quadrato-quadrata est* a; *etenim fit ex quadrato* aa *per quadratum* aa *multiplicato. Quocirca* 16 *dici potest numerus* quadrato-quadratus, *quoniam producitur per quadratum* 4 *per seipsum multiplicatum.*

7. *Eandem ob rem* aabb *dici potest* quadrato-quadratum, *ob quadratum* aa *multiplicatum per quadratum* bb. *Quare* 36 *est numerus* quadrato-quadratus, *fit enim ex quadrato* 9 *multiplicato per quadratum* 4.

8. *Quæ quinque dimensionibus constat magnitudo, ut* aaaaa, supra-solidum *dicitur, &* quinta potentia *appellatur, cujus radix* supra-solida *erit* a. *Itaque si multiplices quadrato-quadratum* aaaa *per suam radicem* a, *hæc dabit* supra-solidum aaaaa. *Eadem de*

de caussa 32 *numerus* supra-solidus *dici potest*, *quoniam fit ex quadrato-quadrato* 16 *multiplicato per suam radicem* 2.

9. *Magnitudo*, *quæ sex dimensionibus similibus constat*, *ut* aaaaaa; *dicitur* quadrato-cubus, *estque* sexta potentia; *dicitur* quadrato-cubus, *quoniam exsurgit ex cubo* aaa *per seipsum multiplicato*. *Hinc* 64, *qui numerus est quadratus*, *dici potest* quadrato-cubus, *quoniam fit ex cubo* 8 *per seipsum producto*.

10. *Hic autem notandum est*, *eundem numerum*, *quatenus ex variis multiplicationibus prodire intelligi potest*, *varias subire posse denominationes*. *Sic numerus* 64 *planus dici potest*, *si a* 32 *multiplicato per* 2, *exsurgere concipiatur*. *Dici etiam potest numerus quadratus*, *si prodire intelligatur ex* 8 *per seipsum multiplicato*. *Cubicus etiam dici potest*, *si ex quadrato* 16 *multiplicato per* 4, *qui est ejus radix quadrata*, *exsurgere cogitetur*.

11. *Advertendum est etiam*, *non omnem magnitudinem quadratam*, *vel cubicam*, *esse numerum quadratum*, *vel cubicum*; *siquidem is numerus duntaxat quadratus dicitur*, *qui ex alio numero per seipsum multiplicato exsurgit*; *hinc* 4, 9, 16, 25 *&c*. *sunt numeri quadrati*, *non item* 20, *aut* 30; *unde si ponatur* 20 *esse æqualem* bb, *hæc utique magnitudo erit quadrata*, *minime vero* 20. *Idem de cubis*, *deque reliquis potentiis majoribus est dicendum*.

12. *Ex magnitudinibus*, *seu potentiis aliæ sunt cognitæ*, *aliæ vero incognitæ*, *quarum nempe valor ignoratur*. *Magnitudines incognitæ tribus posterioribus alphabeti literis notari solent*, *nimirum* x, y, z.

13. *Plura de potentiarum compositione*, *&* *resolutione tradunt Mathematici*, *quæ nos*, *ne ab instituto nostro discedamus*, *leviter*, *&* *summis*, *ut ajunt*, *labiis duntaxat attingemus*. *Et quidem ad potentiarum compositionem quod attinet*, *hanc per variam unius*, *aut plurium magnitudinum multiplicationem fieri ex-*

bette-

hactenus dictis satis colligitur. Si enim multiplices b *per* b, *prodibit quadratum* bb, *quæ est secunda potentia, si productum* bb *per ejus radicem quadratam* b *multiplices, habebis cubum* bbb, *& sic de ceteris.*

14. *Quoniam tamen literarum numerus confusionem parere posset, ubi occurrunt literæ similes, eæ omnes, præter primam, deleri solent, apposita nota numerica, quæ ejus multiplicationem significet ut* §. 4. *docuimus. Hinc* b^4 *idem valet, ac* bbbb, b^5 *idem, ac* bbbbb, *&c. Hæc autem nota numerica post literam a dextris legentis paullo altius est collocanda; siquidem numeri, qui literas pone sequuntur, ad lævam nimirum legentis, non multiplicationem, sed additionem significant. Dixi* paullo altius, *nam si post numerum alia litera proxime sequeretur, ut in hoc exemplo* b4d, *hæc nota* 4, *non* b *quater multiplicatum, sed* d *sibiipsi quater additum esse, significaret.*

15. *Quod spectat ad resolutionem potentiarum, hæc fit, quum inquiritur radix alicujus potentiæ; unde* extractio radicum *etiam vocari solet. Hinc resolvere quadratum* bb *est inquirere magnitudinem, ex cujus multiplicatione exsurgit quadratum* bb, *nimirum* b, *quæ magnitudo comparate ad potentiam* bb *dicitur* radix quadrata, *comparate vero ad cubum* bbb *dicitur* radix cubica, *& sic de ceteris. Similiter* 2 *comparate ad* 4 *est* radix quadrata, *comparate autem ad* 8 radix cubica. *Reliqui numeri plani, qui minime sunt quadrati, varie nonnunquam in suas radices resolvi possunt; nam radix numeri plani v. g.* 24 *est tum* 12 *multiplicatus per* 2, *tum* 8 *multiplicatus per* 3, *tum denique* 6 *multiplicatus per* 4. *Verum hac de re, ad præsens institutum quod attinet, nihil necesse est pluribus disserere; quare ad* Definitiones *libri quinti tandem veniamus.*

DE-

DEFINITIONES.

I. **P**ars dicitur parva magnitudo comparate ad majorem, quam ex æquo metitur, itaut nihil supersit, aut desit. *Hinc linea 2 pedum est pars lineæ 8 pedum, quoniam linea 2 pedum alteram ex æquo metitur, itaut nihil supersit, aut desit.*

1. *In hac definitione Euclides non* partem *in genere, sed eam tantum, quæ* aliquota *dicitur, explicavit. Siquidem pars duplicis est generis, alia dicitur* aliquota, *quæ suum totum ex æquo metitur, ita ut nihil supersit, aut desit; alia dicitur* aliquanta, *quæ pluries repetita suum totum non omnino complectitur; si linea 2 pedum est pars aliquanta lineæ 5 pedum. Hinc colligi potest, quid intelligatur nomine* totius, *nimirum* quantitas major comparate ad minorem, sive illam actu contineat, sive non; *& vicissim nomine partis in genere intelligitur* parva magnitudo comparate ad majorem, in qua continetur, vel contineri potest.

2. *Pars aliquota porro a partium æqualium numero, quo magnitudinem majorem metitur, denominationem desumit; unde pars aliquota, quæ suum totum bis ducta metitur vocatur* dimidium, *atque ita scribitur* $\frac{1}{2}$; *ea vero, quæ ter, dicitur* triens, *seu tertia pars, quæ sic exponitur* $\frac{1}{3}$, *&c.*

3. *Pars aliquanta partes aliquotas, quandoque continet, quæ eamdem magnitudinem ex æquo metiuntur. Sic 6, quæ est pars aliquanta comparate ad 8 continet 2, quæ est pars aliquota numeri 8, nimirum quarta pars.*

4. *Partes sive aliquotæ, sive aliquantæ vocantur fractiones comparate ad totum, cujus sunt partes, quod*

quod si numeris notentur, ut $\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{2}{5}$, *numerus superior vocatur* numerator fractionis, *inferior vero* denominator fractionis; *quare in hac fractione* $\frac{2}{5}$, *quae significat* duo quinta, *numerator est* 2, *denominator vero* 5.

II. *Magnitudo multipla alterius magnitudinis* est, quae certo numero ex aequo continet aliam magnitudinem, ita ut neque illam excedat, neque ab ea excedatur. *Sic linea 6. pedum est multipla lineae 2 pedum, quum eam ter ex aequo contineat.*

1. *Magnitudo illa, quae comparate ad aliam dicitur ejus pars aliquota, dicitur* submultipla *illius, eandemque denominationem sumit, addita particula* sub. *Sic linea 6 pedum dicitur* tripla *lineae 2 pedum, quod eam ter ex aequo contineat; linea vero 2 pedum dicitur* subtripla *lineae 6 pedum, quod in ea ter ex aequo contineatur. Similiter linea 8 pedum est* quadrupla *lineae 2 pedum; linea vero 2 pedum est* subquadrupla *lineae 8 pedum; & sic de ceteris.*

III. *Aequimultiplae plurium magnitudinum* sunt, quae ex aequo certum numerum magnitudinum continent, comparate ad quas aequimultiplae vocantur; sive quae continent aequalem numerum partium aliquotarum, comparate ad quas dicuntur aequimultiplae. *Sic linea 12 pedum, & linea 30 pedum sunt aequimultiplae comparate ad lineam 2 pedum, & ad lineam 5 pedum; nam linea 12 pedum toties continet lineam 2 pedum, quoties linea 30 pedum, continet lineam 5 pedum, nimirum sexies.*

1. *Ita definit magnitudines aequimultiplas Euclides; at nos aequimultiplas vocabimus etiam illas magnitudines, quae aequalem numerum aliarum magnitudinum*

dinum continent, sive numerus hic integer sit, sive non. Quocirca duo numeri 5, *&* 10 *sunt æquimultipli comparate ad duos numeros* 2, *&* 4, *esto* 2 *non sit pars aliquota numeri* 5, *nec* 4 *numeri* 10. *Verum, quoniam* 5 *continet* 2 *bis cum dimidio, non secus ac* 10 *contineat* 4 *bis cum dimidio, hinc hæ duæ magnitudines* 5, *&* 10 *æquimultiplæ optime dici possunt, comparate ad* 2, *&* 4; *qui numeri* 2, *&* 4 *partes similes duarum magnitudinum* 5, *&* 10 *dici possunt, esto non sint partes aliquotæ.*

2. *Eamdem ob rem* 9, *&* 15 *sunt partes similes duarum magnitudinum* 12, *&* 20, *nam duæ priores in duabus posterioribus æqualiter continentur, nimirum semel cum quadrante, sive utraque seorsum est* $\frac{3}{4}$ *duarum posteriorum.*

3. *Partes similes plurium magnitudinum vocantur etiam* æquisubmultiplæ. *Quum igitur duæ magnitudines per aliam quampiam multiplicantur, duo producta sunt earum æquimultipla, ipsæ vero partes similes, & æquisubmultiplæ vocabuntur. Hinc si multiplices* a *&* b *per* c, *duo producta* ac, bc *erunt æquimultipla duarum* a, *&* b, *quæ dicentur æquisubmultiplæ duarum* ac, *&* bc. *Eadem ratione si multiplices* 3, *&* 5 *per* 4 *duo producta* 12, *&* 20 *erunt æquimultipla duorum numerorum* 3, *&* 5; *qui comparate ad* 12, *&* 20 *partes similes, & æquisubmultiplæ dicentur.*

IV. *Ratio* est habitudo quædam, seu comparatio duarum magnitudinum ejusdem generis inter se, per quam innotescit, utrum altera in alia contineatur, & quoties. *dictum est* ejusdem generis, *nam magnitudines diversi generis, ut* linea, *&* planum, *aut* planum, *&* solidum, *minime inter se comparari possunt. Magnitudines similes vocantur* homogeneæ, *ut duo*

 nu-

numeri, *duæ* lineæ, *duo* plana, *duo* solida, *&c. Magnitudines autem dissimiles* heterogeneæ *appellantur.*

1. *Magnitudines, quæ in aliqua ratione inter se comparantur, vocantur* termini *ejusdem rationis, ex quibus ille, qui comparatur alteri, dicitur* antecedens, *ille vero, cui alter comparatur, dicitur* consequens. *Ex. g. in hac ratione 2 ad 3, antecedens est* 2, *consequens vero* 3; *quorum numerorum ratio facile concipi potest, si hoc modo exprimatur* $\frac{2}{3}$ *in qua fractione numerator 2 est terminus antecedens, denominator vero 3 terminus consequens.*

2. *Manifestum est, terminos cujuslibet rationis debere esse homogeneos, & magnitudinis finitæ; alias enim intelligi nequit, quoties, aut quo pacto unus in altero contineatur.*

3. *Ut cognoscatur ratio, quæ inter duas magnitudines intercedit, consequentem terminum per antecedentem dividere oportet, hujus autem divisionis quotiens erit ratio, & exponens qui inquiritur, qui idcirco* quantitas rationis *dici solet. Hinc ut cognoscatur ratio, quæ inter 4 & 14 intercedit dividendus est consequens 14 per antecedens 4, cujus divisionis quotiens, nimirum* $3\frac{1}{2}$ *cum, dabit rationis quantitatem, siquidem 4 continetur in 14 ter cum dimidio.*

4. *Quoniam igitur ratio est quædam quantitatis species, non quidem* absoluta, *sed* relativa; *quidquid quantitati in genere convenit, ipsi pariter convenire debet. Hinc quemadmodum quantitas dicitur, vel major, vel minor, vel æqualis comparate ad aliam, ita etiam ratio potest esse, vel major, vel minor, vel æqualis comparate ad aliam rationem. Quocirca ratio dividitur primo in* rationem æqualitatis, *& in* rationem inæqua-

qualitatis; *ratio æqualitatis est, quæ inter duas magnitudines æquales intercedit; ratio vero inæqualitatis, quæ inter duas magnitudines inæquales intercedit; hinc intelligitur, rationem 2 ad 2 esse rationem æqualitatis, rationem vero 2 ad 3 esse rationem inæqualitatis.*

5. *Ratio inæqualitatis dividitur in* rationem majoris inæqualitatis, & rationem minoris inæqualitatis. *Ratio majoris inæqualitatis est, quum antecedens major est consequente, ut ratio 3 ad 2; Ratio minoris inæqualitatis est, in qua antecedens minor est consequente, ut ratio 2 ad 3. Harum rationum quantitas, seu exponens est numerus, qui exprimit, quoties una magnitudo in altera contineatur; hinc quoniam 3 continet 2 semel cum semisse, ratio 3 ad 2 dicitur ratio* sesquialtera, *cujus exponens est* $1\frac{1}{2}$; *ratio vero* 4 *ad* 2, ratio dupla *cujus exponens est* 2; *ratio* 6 *ad* 2 ratio tripla, *cujus exponens est* 3. *In ratione autem minoris inæqualitatis, ratio* 2 *ad* 3 *dicitur* subsesquialtera; *ratio* 2 *ad* 4 subdupla; *ratio* 2 *ad* 6 subtripla &c. *Nota, exponentem rationis vocari etiam* denominatorem *ejusdem rationis.*

6. *Ratio inæqualitatis dividitur insuper in rationem, quæ appellatur* numeri ad numerum, & *in rationem, quæ* surda *nuncupatur. Ratio numeri ad numerum, quæ etiam* rationalis *dicitur, est, cujus exponens notis numericis exprimi potest; seu in qua numeris exprimi potest, quoties unus rationis terminus in alio contineatur. Ratio vero surda, quæ etiam* irrationalis *dici solet, est, cujus exponens nequit esse nota numerica, sive in qua numeris exponi nequit, quoties unus terminus in alio continetur. Ratio, quæ interest inter diagonalem quadrati, & latus ejusdem quadrati est hujusmodi. Quantumquumque enim di-*

 vidan-

vidantur, & subdividantur, nunquam invenietur pars adeo minima, quæ possit esse utriusque communis mensura; unde fit, ut ratio barum duarum magnitudinum nullo modo numeris exprimi possit. Siquidem quantitatum, quæ numeris exprimuntur, unitates saltem communis mensura esse possunt.

7. *Quotiesquumque duæ magnitudines eam habent inter se rationem, quæ numeris exprimi potest, vocantur* Commensurabiles; *quæ vero surdam habent inter se rationem* Incommensurabiles *dicuntur. Igitur magnitudines commensurabiles eæ sunt, quæ habent partem aliquotam, quæ sit utriusque mensura; incommensurabiles vero, quæ nullam habent partem aliquotam, quæ esse possit communis earum mensura. Quocirca regula, per quam cognosci potest, num duæ magnitudines sint commensurabiles nec ne, in eo sita est, ut si earum ratio numeris exprimi possit, sint commensurabiles, secus sint incommensurabiles.*

8. *Aliquæ magnitudines, quæ in seipsis sunt incommensurabiles, possunt esse commensurabiles* in Potentia. *Ex. g. quum quadratum diagonalis sit duplum quadrati, cujus est diagonalis* (per 47. 1.) *si sumatur quadratum* 9, *cujus latus est* 3, *quadratum diagonalis hujus quadrati valebit* 18, *quæ magnitudo utique est commensurabilis cum quadrato* 9. *At quum* 18 *non sit numerus quadratus, qui nempe fiat ex multiplicatione alicujus numeri per seipsum multiplicati, ejus radix numeris exprimi non poterit, proindeque erit incommensurabilis in se ipsa cum radice quadrati* 9, *esto sit ipsi commensurabilis* in potentia.

9. *Eæ potentiæ, quæ numeris quadratis, vel cubicis exprimi non possunt, ut quadratum duplum quadrati* 9, *vel cubus duplus cubi* 27, imperfectæ *vocantur, quod earum radices numeris exprimi nequeant. Sed de his paullo inferius.*

10. *Rationes, de quibus hactenus loquuti sumus,* Geo-

Geometricæ *vocantur ; sed præterea aliæ sunt rationes, quæ dicuntur* Arithmeticæ. *Discrimen autem, quod Geometricam inter, & Arithmeticam rationem intercedit, est, quod in Geometrica ratione consideratur quoties magnitudo aliqua in alia contineatur ; in ratione vero Arithmetica consideratur, quantum una magnitudo alteram superet ; proindeque ratio Arithmetica dicitur etiam* ratio excessus, *unius magnitudinis comparate ad aliam. Quum* rationem *dicimus, nihil ulterius addendo, rationem Geometricam intelligendam esse volumus, de qua hic præcipue est sermo.*

V. *Rationes æquales*, seu *similes* sunt, in quibus antecedentia æqualiter, sive eodem modo, in consequentibus continentur, aut vicissim ; sive potius: Rationes æquales sunt, in quibus antecedens unius toties continet certam partem aliquotam sui consequentis, puta vel semissem, vel trientem, vel quadrantem, &c. quoties antecedens alterius continet similem partem aliquotam sui consequentis.

1. *Hinc manifestum est, rationem 2 ad 4 æqualem esse rationi 3 ad 6; nam quemadmodum 2 bis continetur in 4. ita 3 bis continetur in 6 ; sive, quemadmodum antecedens 2 continet semel dimidium 4, ita antecedens 3 semel continet dimidium 6; ac proinde eadem est utriusque rationis* quantitas, *seu* denominator, *seu* exponens. *Hæc rationum æqualitas sic exprimi solet: ut 2 ad 4, ita 3 ad 6. Brevitatis autem gratia in tabula rationes æquales exprimuntur hoc modo: 2, 4 :: 3, 6, quæ quatuor puncta significant rationem 2 ad 4 æqualem esse rationi 3 ad 6.*

2. *Hic advertendum est, aliud esse* æqualitatem rationum, *aliud vero* rationem æqualitatis ; *siquidem ratio æqualitatis, ut supra vidimus, ea est, quæ inter duas magnitudines æquales intercedit, ut inter 3 & 3 vel inter* b, *&* b. *At æqualitas rationum est, quum duæ, vel plures rationes sunt æquales eo, quo supra diximus, modo.*

VI.

VI. *Magnitudines proportionales* sunt, quæ eamdem, vel æqualem, vel similem habent inter se rationem. *Hinc quatuor numeri* 2, 3 :: 4, 6 *vocantur proportionales, quod ratio* 2 *ad* 3, *eadem sit, vel æqualis, vel similis rationi* 4 *ad* 6 (*siquidem* ratio eadem, ratio similis, ratio æqualis *idem omnino significant*.) *Quatuor etiam sequentes magnitudines* a, ad, b, bd *sunt proportionales, quoniam ratio* a *ad* ad *eadem est, ac ratio* b *ad* bd; *etenim toties* a *continetur in* ad, *quoties* b *in* bd. *Nam quum* ad *significet* a *multiplicatam esse per* d, bd *vero* b *multiplicatam item per* d, *manifestum est*, a *esse contentam in* ad *certa quadam ratione, seu numero, qui per* d *significatur, non minus ac* b *in* bd; *sive litera* d *numerum integrum, sive fractionem significet. Vide quæ diximus ad defin.* III. *n.* 3.

VII. *Ratio major alia* ea est, cujus antecedens pluries continet certam partem aliquotam sui consequentis, puta dimidium, vel trientem, vel quadrantem &c. quam antecedens alterius similem partem aliquotam sui consequentis contineat. *Quamobrem ratio* 21 *ad* 10 *major est, quam ratio* 100 *ad* 50; *nam* 21 *continet semel, & vicies decimam partem numeri* 10; *At vero* 100 *continet vicies tantum decimam partem numeri* 50, *quæ est* 5. *Ex quo manifestum est, exponentem rationis* 21 *ad* 10 *majorem esse exponente rationis* 100 *ad* 50.

VIII. *Proportio*, sive *Analogia*, est duarum rationum æqualitas. *Ex quo patet, quatuor magnitudines proportionales* a, ad, b, bd; *sive* 3, 6, 2, 4, *de quibus definitone sexta dictum est*, proportionem *constituere. Hinc in qualibet proportione quatuor termini sunt, ex quibus primus & postremus, nimirum* a, & bd *dicuntur* extremi, *reliqui vero duo, nempe* ad, & b medii. *Insuper duo antecedentes* a & b, *vel duo consequentes* ad, & bd *vocantur* homologi, *quod utrique eodem nomine appellentur*.

1. *Hi*

1. *Hi quatuor termini ad tres quandoque reducuntur, quum scilicet consequens prioris rationis idem est cum antecedente alterius rationis; hæcque proportio vocatur* continua, *ut* 2, 4 :: 4, 8; *quod si quatuor termini ad duos reduci nequeant vocatur* discreta, *seu* discontinua, *ut* 10, 15 :: 20, 30. *In proportione continua terminus utrique rationi communis vocatur* medius, *eaque proportio sic exponitur* ∻ 2, 4, 8.

2. *Quemadmodum proportio Geometrica est æqualitas duarum rationum geometricarum, ita proportio Arithmetica est æqualitas duarum rationum arithmeticarum. Quocirca hi quatuor numeri* 5, 6 ::: 9, 10 *sunt in proportione arithmetica, nam idem est excessus* 6 *comparate ad* 5, *ac excessus* 10 *comparate ad* 9. *Quoties tamen* proportionem *nominamus nihil ulterius addendo, proportionem geometricam intelligimus. In arithmetica, non secus ac in geometrica proportione, quatuor termini ad tres reduci possunt, quibus efficitur* proportio arithmetica continua, *ut* 4, 5 ::: 5, 6. *Ubi vero ad tres reduci nequeunt*, discreta *est dicenda*.

IX. *Magnitudines continuo proportionales* eæ dicuntur, quæ sunt in proportione continua, ita ut consequens prioris rationis sit antecedens alterius &c. *ut* ∻ 2, 4, 8, 16, *&c. vel* ∻ 1, 3, 9, 27, 51, *&c. Hæc autem series magnitudinum continue proportionalium vocatur* progressio, *quæ vel* geometrica *est, si nimirum eæ magnitudines sint in proportione geometrica, vel* arithmetica, *si sint in proportione arithmetica*; *ut* 1, 2, 3, 4, 5, *&c. vel* 1, 3, 5, 7, 9, *&c.*

1. *Progressio Arithmetica, quæ naturalem numerorum seriem sequitur, ut* 1, 2, 3, 4, 5, *&c. una cum progressione geometrica conjuncta* Logarithmus *vocatur. Unde ii numeri, qui progressionem quidem arithmeticam sequuntur, re vera tamen concipiuntur sequi progressionem geometricam*, logarithmi *seu* exponentes *vocantur. Sit igitur hæc progressio:*

hactenus dictis satis colligitur. Si enim multiplices b *per* b, *prodibit quadratum* bb, *quæ est secunda potentia, si productum* bb *per ejus radicem quadratam* b *multiplices, habebis cubum* bbb, *& sic de ceteris.*

14. *Quoniam tamen literarum numerus confusionem parere posset, ubi occurrunt literæ similes, eæ omnes, præter primam, deleri solent, apposita nota numerica, quæ ejus multiplicationem significet ut* §. 4. *docuimus. Hinc* b^4 *idem valet, ac* bbbb, b^5 *idem, ac* bbbbb, *&c. Hæc autem nota numerica post literam a dextris legentis paullo altius est collocanda; siquidem numeri, qui literas pone sequuntur, ad lævam nimirum legentis, non multiplicationem, sed additionem significant. Dixi* paullo altius, *nam si post numerum alia litera proxime sequeretur, ut in hoc exemplo* b4d, *hæc nota* 4, *non* b *quater multiplicatum, sed* d *sibiipsi quater additum esse, significaret.*

15. *Quod spectat ad resolutionem potentiarum, hæc fit, quum inquiritur radix alicujus potentiæ; unde* extractio radicum *etiam vocari solet. Hinc resolvere quadratum* bb *est inquirere magnitudinem, ex cujus multiplicatione exsurgit quadratum* bb, *nimirum* b, *quæ magnitudo comparate ad potentiam* bb *dicitur* radix quadrata, *comparate vero ad cubum* bbb *dicitur* radix cubica, *& sic de ceteris. Similiter* 2 *comparate ad* 4 *est* radix quadrata, *comparate autem ad* 8 radix cubica. *Reliqui numeri plani, qui minime sunt quadrati, varie nonnunquam in suas radices resolvi possunt; nam radix numeri plani v. g.* 24 *est tum* 12 *multiplicatus per* 2, *tum* 8 *multiplicatus per* 3, *tum denique* 6 *multiplicatus per* 4. *Verum hac de re, ad præsens institutum quod attinet, nihil necesse est pluribus disserere; quare ad* Definitiones *libri quinti tandem veniamus.*

DEFINITIONES.

I. PArs dicitur parva magnitudo comparate ad majorem, quam ex æquo metitur, itaut nihil supersit, aut desit. *Hinc linea 2 pedum est pars lineæ 8 pedum, quoniam linea 2 pedum alteram ex æquo metitur, itaut nihil supersit, aut desit.*

1. *In hac definitione Euclides non* partem *in genere, sed eam tantum, quæ* aliquota *dicitur, explicavit. Siquidem pars duplicis est generis, alia dicitur* aliquota, *quæ suum totum ex æquo metitur, ita ut nihil supersit, aut desit; alia dicitur* aliquanta, *quæ pluries repetita suum totum non omnino complectitur; si linea 2 pedum est pars aliquanta lineæ 5 pedum. Hinc colligi potest, quid intelligatur nomine* totius, *nimirum* quantitas major comparate ad minorem, sive illam actu contineat, sive non; *& vicissim nomine partis in genere intelligitur* parva magnitudo comparate ad majorem, in qua continetur, vel contineri potest.

2. *Pars aliquota porro a partium æqualium numero, quo magnitudinem majorem metitur, denominationem desumit; unde pars aliquota, quæ suum totum bis ducta metitur vocatur* dimidium, *atque ita scribitur* $\frac{1}{2}$; *ea vero, quæ ter, dicitur* triens, *seu tertia pars, quæ sic exponitur* $\frac{1}{3}$, *&c.*

3. *Pars aliquanta partes aliquotas, quandoque continet, quæ eamdem magnitudinem ex æquo metiuntur. Sic* 6, *quæ est pars aliquanta comparate ad* 8 *continet* 2, *quæ est pars aliquota numeri* 8, *nimirum quarta pars.*

4. *Partes sive aliquotæ, sive aliquantæ vocantur fractiones comparate ad totum, cujus sunt partes, quod*

quod si numeris notentur, ut $\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{2}{5}$ *numerus superior vocatur* numerator fractionis, *inerior vero* denominator fractionis; *quare in hac fractione* $\frac{2}{5}$ *quae significat* duo quinta, *numerator est* 2, *denominator vero* 5.

II. *Magnitudo multipla alterius magnitudinis* est, quæ certo numero ex æquo continet aliam magnitudinem, ita ut neque illam excedat, neque ab ea excedatur. *Sic linea* 6. *pedum est multipla lineæ* 2 *pedum, quum eam ter ex æquo contineat.*

1. *Magnitudo illa, quæ comparate ad aliam dicitur ejus pars aliquota, dicitur* submultipla *illius, eandemque denominationem sumit, addita particula* sub. *Sic linea* 6 *pedum dicitur* tripla *lineæ* 2 *pedum, quod eam ter ex æquo contineat; linea vero* 2 *pedum dicitur* subtripla *lineæ* 6 *pedum, quod in ea ter ex æquo contineatur. Similiter linea* 8 *pedum est* quadrupla *lineæ* 2 *pedum; linea vero* 2 *pedum est* subquadrupla *lineæ* 8 *pedum; & sic de ceteris.*

III. *Æquimultiplæ plurium magnitudinum* sunt, quæ ex æquo certum numerum magnitudinum continent, comparate ad quas æquimultiplæ vocantur; sive quæ continent æqualem numerum partium aliquotarum, comparate ad quas dicuntur æquimultiplæ. *Sic linea* 12 *pedum, & linea* 30 *pedum sunt æquimultiplæ comparate ad lineam* 2 *pedum, & ad lineam* 5 *pedum; nam linea* 12 *pedum toties continet lineam* 2 *pedum, quoties linea* 30 *pedum, continet lineam* 5 *pedum, nimirum sexies*

1. *Ita definit magnitudines æquimultiplas Euclides; at nos æquimultiplas vocabimus etiam illas magnitudines, quæ æqualem numerum aliarum magnitudinum*

dinum continent, sive numerus hic integer sit, sive non. Quocirca duo numeri 5, *&* 10 *sunt æquimultipli comparate ad duos numeros* 2, *&* 4, *esto* 2 *non sit pars aliquota numeri* 5, *nec* 4 *numeri* 10. *Verum, quoniam* 5 *continet* 2 *bis cum dimidio, non secus ac* 10 *contineat* 4 *bis cum dimidio, hinc hæ duæ magnitudines* 5, *&* 10 *æquimultiplæ optime dici possunt, comparate ad* 2, *&* 4; *qui numeri* 2, *&* 4 *partes similes duarum magnitudinum* 5, *&* 10 *dici possunt, esto non sint partes aliquotæ.*

2. *Eamdem ob rem* 9, *&* 15 *sunt partes similes duarum magnitudinum* 12, *&* 20, *nam duæ priores in duabus posterioribus æqualiter continentur, nimirum semel cum quadrante, sive utraque seorsum est* $\frac{3}{4}$ *duarum posteriorum.*

3. *Partes similes plurium magnitudinum vocantur etiam* æquisubmultiplæ. *Quum igitur duæ magnitudines per aliam quampiam multiplicantur, duo producta sunt earum æquimultipla, ipsæ vero partes similes, & æquisubmultiplæ vocabuntur. Hinc si multiplices* a *&* b *per* c, *duo producta* ac, bc *erunt æquimultipla duarum* a, *&* b, *quæ dicentur æquisubmultiplæ duarum* ac, *&* bc. *Eadem ratione si multiplices* 3, *&* 5 *per* 4 *duo producta* 12, *&* 20 *erunt æquimultipla duorum numerorum* 3, *&* 5; *qui comparate ad* 12, *&* 20 *partes similes, & æquisubmultiplæ dicentur.*

IV. *Ratio* est habitudo quædam, seu comparatio duarum magnitudinum ejusdem generis inter se, per quam innotescit, utrum altera in alia contineatur, & quoties. *dictum est* ejusdem generis, *nam magnitudines diversi generis, ut* linea, *&* planum, *aut* planum, *&* solidum, *minime inter se comparari possunt. Magnitudines similes vocantur* homogeneæ, *ut duo*

nu-

numeri, *duæ* lineæ, *duo* plana, *duo* solida, *&c. Magnitudines autem dissimiles* heterogeneæ *appellantur.*

1. *Magnitudines, quæ in aliqua ratione inter se comparantur, vocantur* termini *ejusdem rationis, ex quibus ille, qui comparatur alteri, dicitur* antecedens, *ille vero, cui alter comparatur, dicitur* consequens. *Ex. g. in hac ratione* 2 *ad* 3, *antecedens est* 2, *consequens vero* 3; *quorum numerorum ratio facile concipi potest, si hoc modo exprimatur* $\frac{2}{3}$ *in qua fractione numerator* 2 *est terminus antecedens, denominator vero* 3 *terminus consequens.*

2. *Manifestum est, terminos cujuslibet rationis debere esse homogeneos, & magnitudinis finitæ; alias enim intelligi nequit, quoties, aut quo pacto unus in altero contineatur.*

3. *Ut cognoscatur ratio, quæ inter duas magnitudines intercedit, consequentem terminum per antecedentem dividere oportet, hujus autem divisionis quotiens erit ratio, & exponens qui inquiritur, qui idcirco* quantitas rationis *dici solet. Hinc ut cognoscatur ratio, quæ inter* 4 *&* 14 *intercedit dividendus est consequens* 14 *per antecedens* 4, *cujus divisionis quotiens, nimirum* 3 *cum* $\frac{1}{2}$, *dabit rationis quantitatem, siquidem* 4 *continetur in* 14 *ter cum dimidio.*

4. *Quoniam igitur ratio est quædam quantitatis species, non quidem* absoluta, *sed* relativa; *quidquid quantitati in genere convenit, ipsi pariter convenire debet. Hinc quemadmodum quantitas dicitur, vel major, vel minor, vel æqualis comparate ad aliam, ita etiam ratio potest esse, vel major, vel minor, vel æqualis comparate ad aliam rationem. Quocirca ratio dividitur primo in* rationem æqualitatis, *& in* rationem inæqua-

qualitatis; *ratio æqualitatis est, quæ inter duas magnitudines æquales intercedit; ratio vero inæqualitatis, quæ inter duas magnitudines inæquales intercedit; hinc intelligitur, rationem 2 ad 2 esse rationem æqualitatis, rationem vero 2 ad 3 esse rationem inæqualitatis.*

5. *Ratio inæqualitatis dividitur in* rationem majoris inæqualitatis, *&* rationem minoris inæqualitatis. *Ratio majoris inæqualitatis est, quum antecedens major est consequente, ut ratio 3 ad 2. Ratio minoris inæqualitatis est, in qua antecedens minor est consequente, ut ratio 2 ad 3. Harum rationum quantitas, seu exponens est numerus, qui exprimit, quoties una magnitudo in altera contineatur; hinc quoniam 3 continet 2 semel cum semisse, ratio 3 ad 2 dicitur ratio* sesquialtera, *cujus exponens est* $1\frac{1}{2}$; *ratio vero 4 ad 2*, ratio dupla *cujus exponens est 2; ratio 6 ad 2* ratio tripla, *cujus exponens est 3. In ratione autem minoris inæqualitatis, ratio 2 ad 3 dcitur* subsesquialtera; *ratio 2 ad 4* subdupla; *ratio 2 ad 6* subtripla *&c. Nota, exponentem rationis vocari etiam* denominatorem *ejusdem rationis.*

6. *Ratio inæqualitatis dividitur insuper in rationem, quæ appellatur* numeri ad numerum, *& in rationem, quæ* surda *nuncupatur. Ratio numeri ad numerum, quæ etiam* rationalis *dicitur, est, cujus exponens notis numericis exprimi potest; seu in qua numeris exprimi potest, quoties unus rationis terminus in alio contineatur. Ratio vero surda, quæ etiam* irrationalis *dici solet, est, cujus exponens nequit esse nota numerica, sive in qua numeris exponi nequit, quoties unus terminus in alio continentur. Ratio, quæ interest inter diagonalem quadrati, & latus ejusdem quadrati est hujusmodi. Quantumquumque enim di-*

 vidan-

vidantur, & subdividantur, nunquam inveniatur pars adeo minima, quæ possit esse utriusque communis mensura; unde fit, ut ratio harum duarum magnitudinum nullo modo numeris exprimi possit. Siquidem quantitatum, quæ numeris exprimuntur, unitates saltem communis mensura esse possunt.

7. *Quotiesquumque duæ magnitudines eam habent inter se rationem, quæ numeris exprimi potest, vocantur* Commensurabiles; *quæ vero surdam habent inter se rationem* Incommensurabiles *dicuntur. Igitur magnitudines commensurabiles eæ sunt, quæ habent partem aliquotam, quæ sit utriusque mensura; incommensurabiles vero, quæ nullam habent partem aliquotam, quæ esse possit communis earum mensura. Quocirca regula, per quam cognosci potest, num duæ magnitudines sint commensurabiles nec ne, in eo sita est, ut si earum ratio numeris exprimi possit, sint commensurabiles, secus sint incommensurabiles.*

8. *Aliquæ magnitudines, quæ in seipsis sunt incommensurabiles, possunt esse commensurabiles* in Potentia. *Ex. g. quum quadratum diagonalis sit duplum quadrati, cujus est diagonalis* (per 47. 1.) *si sumatur quadratum 9, cujus latus est 3, quadratum diagonalis hujus quadrati valebit 18, quæ magnitudo utique est commensurabilis cum quadrato 9. At quum 18 non sit numerus quadratus, qui nempe fiat ex multiplicatione alicujus numeri per seipsum multiplicati, ejus radix numeris exprimi non poterit, proindeque erit incommensurabilis in se ipsa cum radice quadrati 9, esto sit ipsi commensurabilis* in potentia.

9. *Ex potentiæ, quæ numeris quadratis, vel cubicis exprimi non possunt, ut quadratum duplum quadrati 9, vel cubus duplus cubi 27,* imperfectæ *vocantur, quod earum radices numeris exprimi nequeant. Sed de his paullo inferius.*

10. *Rationes, de quibus hactenus loquuti sumus,*

Geo-

Geometricæ *vocantur* ; *sed præterea aliæ sunt rationes, quæ dicuntur* Arithmeticæ. *Discrimen autem, quod Geometricam inter, & Arithmeticam rationem intercedit, est, quod in Geometrica ratione consideratur quoties magnitudo aliqua in alia contineatur ; in ratione vero Arithmetica consideratur, quantum una magnitudo alteram superet ; proindeque ratio Arithmetica dicitur etiam* ratio excessus, *unius magnitudinis comparate ad aliam. Quum* rationem *dicimus, nihil ulterius addendo, rationem Geometricam intelligendam esse volumus, de qua hic præcipue est sermo.*

V. *Rationes æquales*, seu *similes* sunt, in quibus antecedentia æqualiter, sive eodem modo, in consequentibus continentur, aut vicissim ; sive potius: Rationes æquales sunt, in quibus antecedens unius toties continet certam partem aliquotam sui consequentis, puta vel semissem, vel trientem, vel quadrantem, &c. quoties antecedens alterius continet similem partem aliquotam sui consequentis.

1. *Hinc manifestum est, rationem 2 ad 4 æqualem esse rationi 3 ad 6; nam quemadmodum 2 bis continetur in 4. ita 3 bis continetur in 6 ; sive, quemadmodum antecedens 2 continet semel dimidium 4, ita antecedens 3 semel continet dimidium 6; ac proinde eadem est utriusque rationis* quantitas, *seu* denominator, *seu* exponens. *Hæc rationum æqualitas sic exprimi solet : ut 2 ad 4, ita 3 ad 6. Brevitatis autem gratia in tabula rationes æquales exprimuntur hoc modo*: 2, 4 : : 3, 6, *quæ quatuor puncta significant rationem 2 ad 4 æqualem esse rationi 3 ad 6.*

2. *Hic advertendum est, aliud esse* æqualitatem rationum, *aliud vero* rationem æqualitatis ; *siquidem ratio æqualitatis, ut supra vidimus, ea est, quæ inter duas magnitudines æquales intercedit, ut inter 3 & 3 vel inter* b, *&* b. *At æqualitas rationum est, quum duæ, vel plures rationes sunt æquales eo, quo supra diximus, modo.*

VI. *Magnitudines proportionales* ſunt, quæ eamdem, vel æqualem, vel ſimilem habent inter ſe rationem. *Hinc quatuor numeri* 2, 3 :: 4, 6 *vocantur proportionales, quod ratio* 2 *ad* 3, *eadem ſit, vel æqualis, vel ſimilis rationi* 4 *ad* 6 (*ſiquidem* ratio eadem, ratio ſimilis, ratio æqualis *idem omnino ſignificant*.) *Quatuor etiam ſequentes magnitudines* a, ad, b, bd *ſunt proportionales, quoniam ratio* a *ad* ad *eadem eſt, ac ratio* b *ad* bd; *etenim toties* a *continetur in* ad, *quoties* b *in* bd. *Nam quùm* ad *ſignificet* a *multiplicatam eſſe per* d, bd *vero* b *multiplicatam item per* d, *manifeſtum eſt*, a *eſſe contentam in* ad *certa quadam ratione, ſeu numero, qui per* d *ſignificatur, non minus ac* b *in* bd; *ſive littera* d *numerum integrum, ſive fractionem ſignificet. Vide quæ diximus ad defin.* III. *n.* 3.

VII. *Ratio major alia* ea eſt, cujus antecedens pluries continet certam partem aliquotam ſui conſequentis, puta dimidium, vel trientem, vel quadrantem &c. quam antecedens alterius ſimilem partem aliquotam ſui conſequentis contineat. *Quamobrem ratio* 21 *ad* 10 *major eſt, quam ratio* 100 *ad* 50; *nam* 21 *continet ſemel, & vicies decimam partem numeri* 10; *At vero* 100 *continet vicies tantum decimam partem numeri* 50, *quæ eſt* 5. *Ex quo manifeſtum eſt, exponentem rationis* 21 *ad* 10 *majorem eſſe exponente rationis* 100. *ad* 50.

VIII. *Proportio*, ſive *Analogia*, eſt duarum rationum æqualitas. *Ex quo patet, quatuor magnitudines proportionales* a, ad, b, bd; *ſive* 3, 6, 2, 4, *de quibus definitone ſexta dictum eſt*, proportionem *conſtituere. Hinc in qualibet proportione quatuor termini ſunt, ex quibus primus & poſtremus, nimirum* a, *&* bd *dicuntur* extremi, *reliqui vero duo, nempe* ad, *&* b medii. *Inſuper duo antecedentes* a *&* b, *vel duo conſequentes* ad, *&* bd *vocantur* homologi, *quod utrique eodem nomine appellentur*.

1. Hi

1. *Hi quatuor termini ad tres quandoque reducuntur, quum scilicet consequens prioris rationis idem est cum antecedente alterius rationis; hæcque proportio vocatur* continua, *ut* 2, 4 :: 4, 8; *quod si quatuor termini ad duos reduci nequeant vocatur* discreta, *seu* discontinua, *ut* 10, 15 :: 20, 30. *In proportione continua terminus utrique rationi communis vocatur* medius, *eaque proportio sic exponitur* ∺ 2, 4, 8.

2. *Quemadmodum proportio Geometrica est æqualitas duarum rationum geometricarum, ita proportio Arithmetica est æqualitas duarum rationum arithmeticarum. Quocirca hi quatuor numeri* 5, 6 ::: 9, 10 *sunt in proportione arithmetica, nam idem est excessus* 6 *comparate ad* 5, *ac excessus* 10 *comparate ad* 9. *Quoties tamen* proportionem *nominamus nihil ulterius addendo, proportionem geometricam intelligimus. In arithmetica, non secus ac in geometrica proportione, quatuor termini ad tres reduci possunt, quibus efficitur* proportio arithmetica continua, *ut* 4, 5 ::: 5, 6. *Ubi vero ad tres reduci nequeunt*, discreta *est dicenda.*

IX. *Magnitudines continuo proportionales* eæ dicuntur, quæ sunt in proportione continua, ita ut consequens prioris rationis sit antecedens alterius &c. *ut* ∺ 2, 4, 8, 16, *&c. vel* ∺ 1, 3, 9, 27, 51, *&c. Hæc autem series magnitudinum continue proportionalium vocatur* progressio, *quæ vel* geometrica *est, si nimirum eæ magnitudines sint in proportione geometrica, vel* arithmetica, *si sint in proportione arithmetica, ut* 1, 2, 3, 4, 5, *&c. vel* 1, 3, 5, 7, 9, *&c.*

1. *Progressio Arithmetica, quæ naturalem numerorum seriem sequitur, ut* 1, 2, 3, 4, 5, *&c. una cum progressione geometrica conjuncta* Logarithmus *vocatur. Unde ii numeri, qui progressionem quidem arithmeticam sequuntur, re vera tamen concipiuntur sequi progressionem geometricam*, logarithmi *seu* exponentes *vocantur. Sit igitur hac progressio:*

a,

$a^1, a^2, a^3, a^4, a^5, a^6, a^7, a^8, a^9,$ &c.
2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512, &c.

2. *Manifestum est ex iis, quæ diximus in Algebræ synopsi* §. 10. *n.* 14. *seriem numerorum exponentium* 1, 2, 3, 4, 5 *&c. multiplicationem significare; quare si* a *valeat* 2, a^2, *seu* aa, *valebit* 4, a^3 8, *insuper* a^4 16 *&c. ex quo sequitur, hos numeros, esto progressionem arithmeticam exhibere videantur, revera sequi progressionem geometricam.*

3. *Usus horum Logarithmorum maximus est, ubi cognitis tribus terminis quibusquumque, quartus terminus, qui proportionem cum iis habeat, inquiritur. Siquidem ut inveniatur quartus terminus proportionalis tribus terminis datis, adhiberi solet ea Arithmeticæ regula, quæ* aurea *per excellentiam dicitur, &* Regula trium *vulgo appellari solet, quæ ope* multiplicationis *simul, &* divisionis *perficitur. Quum enim in qualibet proportione geometrica, ut videbimus, productum extremorum æquale sit producto mediorum, si dati sint tres termini* 4, 16, 64, *quibus inveniendus sit quartus terminus proportionalis, ita ut quemadmodum* 4 *ad* 16, *ita* 64 *ad hunc quartum terminum; multiplicari prius deberet* 16 *per* 64, *hujusque multiplicationis productum (scilicet* 1024 *) dividi per primum terminum* 4; *quo facto* quotiens *hujus divisionis (nimirum* 256,) *erit quartus terminus, qui inquiritur, proindeque erit* 4, 16 :: 64, 256. *Nam si multiplices* 4 *per* 256 *productum* 1024 *æquale erit producto duorum mediorum* 16, *&* 64.

4. *Quod igitur sine Logarithmis per multiplicationem, & divisionem, quæ operationes non parum operosæ sunt, fieri oportet, adhibitis logarithmi sper solam additionem, & subtractionem perficitur, quæ*

duæ

quæ duæ operationes vix quidquam habent difficultatis. Quum enim in proportione arithmetica, non productum, sed summa extremorum æqualis sit summæ mediorum, si dati sint tres termini, quibus quartus arithmetice proportionalis sit inveniendus, satis erit duos posteriores, scilicet secundum, & tertium, per additionem colligere, atque ab eorum summa primum terminum subtrahere, quo peracto, id, quod supererit, erit quartus terminus arithmetice proportionalis.

5. *Quoniam igitur Logarithmi utramque progressionem, ut dictum est, arithmeticam simul, & geometricam cotinent, ut datis tribus terminis* 4, 16, 64 *quartus proportionalis inveniatur, videndum in tabula Logarithmorum quinam sint Logarithmi, qui tribus hisce numeris respondeant, quos in tabula, sive exemplo superius posito, constat esse* 2, 4, 6; *collecta igitur summa duorum posteriorum* 4, *&* 6, *quæ est* 10, *subtrahatur a* 10 *prior terminus* 2, *quo facto supererit* 8 *logarithmus numeri* 256, *qui idcirco erit quartus terminus proportionalis, qui inquirebatur, proindeque erit* 4, 16 :: 64, 256; *sive* $a^2, a^4 :: a^6, a^8$.

6. *Quoniam igitur utriusque progressionis, geometricæ nimirum, & arithmeticæ, conjunctio efficit, ut per* additionem, *&* subtractionem *inveniatur id, quod sine logarithmis per* multiplicationem, *&* divisionem *esset inveniendum, quæ duæ operationes multo operosiores sunt; in id maxime incubuerunt Mathematici, ut tabulas construerent, in quibus numeri ab* 1 *usque ad* 100000, *& amplius, secundum naturalem numerorum seriem dispositi continerentur, quibus totidem numeri in progressione geometrica distributi responderent. Id autem non sine maximo labore, atque animi contentione a pluribus præstitum fuit, præsertim vero a* Nepero *Scoto, qui tamen quum opus quidem inchoaverit, at minime perficere potuerit, id præstitit*

Briggius & Auglut. *Hæ tabulæ præterea reperiuntur apud* Clavium, Ozanamum, *& alios*.

X. In progressione geometrica, idest in serie plurium quantitatum continue proportionalium, ratio prioris ad tertiam est *duplo major*, seu *duplicata* rationis prioris ad secundam, aut secundæ ad tertiam. Ratio autem prioris ad quartam est *triplo major*, seu *triplicata* rationis primæ ad secundam, vel secundæ ad tertiam, vel tertiæ ad quartam.

1. *In hac igitur serie quantitatum continue proportionalium* 1, 2, 4, 8, 16, 32 *&c. vel vice versa* 32, 16, 8, 4, 2, 1, *ratio primæ* 32 *ad tertiam* 8 *est duplicata, seu duplo major ratione ejusdem primæ* 32 *ad secundam* 16, *sive est æqualis duabus rationibus* 32 *ad* 16, *&* 16 *ad* 8 *simul sumtis. Ratio vero primæ* 32 *ad quartam* 4 *est triplicata rationis ejusdem* 32 *ad secundam* 16, *seu est æqualis tribus rationibus* 32 *ad* 16, 16 *ad* 8, *&* 8 *ad* 4 *simul sumtis. Eodem modo ratio* a *ad* aaa, *est duplicata rationis* a *ad* aa, *vel* aa *ad* aaa; *ratio vero* a *ad* aaaa *est, triplicata rationis* a *ad* aa, *vel* aa *ad* aaa *&c.*

2. *Cavendum diligenter est, ne confundatur* ratio duplicata, *sive* duplata *cum* ratione dupla; *vel* triplata, *sive* triplicata *cum* tripla. *Nam ratio* 32 *ad* 8, *quæ est quadrupla, est duplata rationis* 32 *ad* 16, *ut vidimus; item ratio* 32 *ad* 4, *quæ est octupla, est triplicata ejusdem* 32 *ad* 16. *Eodem pacto ratio* 9 *ad* 1, *quæ est nonupla, est duplata rationis* 9 *ad* 3, *vel* 3 *ad* 1, *& sic de ceteris.*

3. *Hujusmodi autem rationes idcirco dicuntur duplicatæ, vel triplicatæ comparatæ ad alias, quod ex iis componantur; siquidem ratio duplicata alicujus rationis dicitur, quæ ex duabus rationibus similibus est composita; triplicata vero, quæ ex tribus. Quare* Ratio composita ex pluribus rationibus *ea est, quæ est æqualis producto, quod exsurgit ex multiplicatione earum* ra-

rationum, ex quibus dicitur composita. Ex. g. ratio composita ex hisce tribus rationibus $\frac{1}{3}, \frac{4}{8}, \frac{5}{20}$, *est* $\frac{1}{24}$; *nam si multiplices rationem* 1 *ad* 3 *quæ est subtripla, seu* 3, *per rationem* 4 *ad* 8, *quæ est subdupla, seu* 2, *habebis* 6, *quod productum si iterum multiplices per rationem* 5 *ad* 20, *quæ est subquadrupla, seu* 4, *habebis* 24, *quæ erit quantitas, seu exponens rationis ex illis tribus compositæ.*

4. *Quia tamen non omnes rationes numeris exprimi possunt; immo in iis, quæ numeris exprimi possunt, aliquando fractiones numerorum occurrunt, cujusmodi sunt rationes* $\frac{2}{3}, \frac{4}{5}, \frac{6}{7}$, *quarum rationum quantitas numeris integris exponi nequit, ut inveniatur ratio ex illis composita alia uti possumus methodo, multiplicando nimirum ex una parte omnes antecedentes, ex alia vero omnes consequentes, quorum producta, simul collata dabunt quantitatem rationis compositæ. Quocirca hæc ratio* $\frac{48}{105}$ *erit composita ex tribus* $\frac{2}{3}, \frac{4}{5}, \frac{6}{7}$; *similiter hæc ratio* $\frac{abc}{dfg}$ *erit composita ex tribus rationibus* a *ad* d, b *ad* f, c *ad* g.

5. *Quum dictum sit, rationem duplatam esse compositam ex duabus rationibus similibus, triplatam vero ex tribus, atque adeo quadruplicatam ex quatuor &c. jam manifestum est omnem rationem duplicatam, vel triplicatam esse etiam compositam, non vero e converso omnem rationem compositam esse duplicatam, aut triplicatam. Nam ratio composita fit etiam ex pluribus rationibus dissimilibus, & minime proportionalibus, ut in exemplis supra adductis patet; at*

at ratio duplicata, vel triplicata &c. ex similibus tantum componi postulat, quarum termini sint in proportione continua, ut per se manifestum est.

6. *Hinc etiam patet, quantitatem, seu exponentem rationis duplatæ rationis numeri ad numerum esse numerum quadratum, nimirum productum exponentis duarum rationum æqualium per seipsum multiplicati, qui exponens numeris exprimitur, quando eæ rationes, ex quibus componitur ratio duplata, sunt rationes numeri ad numerum. Constat etiam, quantitatem, seu exponentem rationis triplatæ rationis numeri ad numerum esse numerum cubicum, nimirum cubum exponentis trium rationum similium cubice multiplicati. Hinc quum ratio duplata rationis 3 ad 6, nimirum 3 ad 12, sit subquadrupla, ejus exponens erit numerus quadratus, nimirum 4, cujus radix 2 est exponens rationis 3 ad 6; ratio vero triplata ejusdem rationis 3 ad 6, nempe 3 ad 24, quia est suboctupla, ejus exponens erit numerus cubicus, scilicet 8. Ex quo sequitur, rationem duplatam, vel triplatam rationis numeri ad numerum esse pariter rationem numeri ad numerum.*

7. *E contrario, si exponentes rationis duplatæ, vel triplatæ alicujus rationis simplicis non sint numeri quadrati, vel cubici, ratio simplex erit surda. Ex. g. si exponens hujus rationis* $\frac{xx}{zz}$, *quæ est duplata rationis simplicis* $\frac{x}{z}$, *non sit numerus quadratus; itemque exponens rationis* $\frac{xxx}{zzz}$, *quæ est triplata ejusdem rationis x ad z, non sit numerus cubicus, hæ duæ magnitudines x, & z erunt incommensurabiles. Nam si eæ essent commensurabiles, earum ratio esset numeri ad numerum, proindeque etiam earum duplata, & triplata, ut ostensum est n. 6. quod est contra hypothesim.*

8. Ex

8. *Ex hactenus dictis colligi potest, in pluribus quantitatibus continue proportionalibus rationem primæ ad tertiam æqualem esse rationi quadrati primæ, ad quadratum secundæ, vel quadrati secundæ ad quadratum tertiæ; itemque rationem primæ ad quartam æqualem esse rationi cubi primæ ad cubum secundæ, vel cubi secundæ ad cubum tertiæ &c. Ex. g. ex his magnitudinibus continue proportionalibus* ∺ 2, 4, 8, 16 *&c. ratio* 2 *ad* 8 *æqualis est rationi* 4, *quod est quadratum* 2, *ad* 16, *quod est quadratum* 4. *Item ratio* 2 *ad* 16 *æqualis est rationi* 8, *qui est cubus* 2, *ad* 64, *qui est cubus* 4, *& sic de ceteris. Hac de caussa intelligimus, hanc rationem* $\frac{aa}{bb}$ *esse duplatam rationis* a *ad* b, *quoniam æqualis est rationi quadrati* a *nimirum* aa *ad quadratum* b, *scilicet* bb. *Ea de caussa pariter hæc ratio* $\frac{aaa}{bbb}$ *est triplata rationis* a *ad* b, *quoniam æqualis est rationi cubi* a *ad cubum* b, *ut patet.*

9. *Hinc erui possunt regulæ ad dignoscendum, quænam magnitudines sint commensurabiles, quænam vero non item; quarum prima est:* Si ex tribus magnitudinibus continue proportionalibus ratio primæ ad tertiam sit ratio numeri ad numerum, & ejus exponens sit numerus quadratus, tres illæ magnitudines continue proportionales erunt commensurabiles. *Nam quum ratio primæ ad tertiam æqualis sit rationi quadrati primæ ad quadratum secundæ, si illius exponens sit numerus quadratus, etiam quadrata trium magnitudinum numeris quadratis exprimi poterunt, quorum proinde radices habebunt rationem numeri ad numerum. Vide quæ diximus ad definitionem* IV.

10. *Secunda regula est:* Si ex tribus magnitudini-

dinibus continue proportionalibus ratio primæ ad tertiam ſit ratio numeri ad numerum, at ejus exponens non ſit numerus quadratus, prima, & ſecunda magnitudo, tum ſecunda, & tertia erunt in ſeipſis incommenſurabiles, & tantum commenſurabiles in potentia. *Quum enim ratio primæ ad tertiam ſit æqualis rationi quadrati primæ ad quadratum ſecundæ, ſi, illa ſit ratio numeri ad numerum, etiam ratio quadrati primæ ad quadratum ſecundæ, erit numeri ad numerum; at quoniam illius exponens non eſt numerus quadratus, quadrata primæ, & ſecundæ, vel ſecundæ & tertiæ numeris quadratis exprimi non poterunt, proindeque earum radices erunt incommenſurabiles. Hac ratione diagonalis quadrati eſt incommenſurabilis lateri; vide quæ diximus ad def. IV. n. 8 Ex quo ſequitur, radicem quadrati dupli alterius, puta dupli quadrati 9, non poſſe numeris exprimi.*

11. *Tertia regula eſt*: Si ex tribus magnitudinibus continue proportionalibus ratio primæ ad tertiam non ſit ratio numeri ad numerum, magnitudo prima, & ſecunda, tum ſecunda, & tertia erunt, tum in ſeipſis, tum in ſecunda potentia incommenſurabiles. *In ſe quidem, quoniam ea ratio eſt ſurda, cujus duplata non eſt numerus quadratus, ut oſtendimus n. 7. In potentia etiam, nam quum ratio primæ ad tertiam eadem ſit, ac ratio quadrati primæ ad quadratum ſecundæ, vel quadrati ſecundæ ad quadratum tertiæ, ſi hæc ſit ſurda, etiam ratio primæ ad tertiam erit ſurda. Tres hæ regulæ ad radices quadratas pertinent; tres vero ſequentes, quæ tribus prioribus ſimiles ſunt, atque eodem principio nituntur, ad radices cubicas referuntur.*

12. *Quarta regula eſt*: Si ex quatuor magnitudinibus continue proportionalibus ratio primæ ad quartam ſit ratio numeri ad numerum, & numeris cubi-

cubicis exponatur, quatuor eæ magnitudines erunt commensurabiles. *Nam quum ratio primæ ad quartam sit eadem, ac ratio cubi primæ ad cubum secundæ, ex dictis n. 8, si ea numeris cubicis exponatur, harum etiam cubi numeris cubicis exprimi poterunt, quorum radices idcirco habebunt rationem numeri ad numerum. Vide exemplum propositum numero* 6.

13. *Quinta regula est*. Si ex quatuor magnitudinibus continue proportionalibus ratio primæ ad quartum sit ratio numeri ad numerum, at ea numeris cubicis exprimi nequeat, prima, & secunda magnitudo, tum secunda & tertia, tum denique tertia, & quarta erunt in seipsis incommensurabiles, & tantum commensurabiles in tertia potentia, scilicet in cubo. *Hac de caussa radix cubi dupli alterius, puta cubi, qui sit duplus cubi* 8, *numeris exprimi non potest; quod cubus duplus cubi* 8, *nempe* 16, *numero cubico non possit exponi.*

14. *Sexta regula est*: Si ex quatuor magnitudinibus continue proportionalibus ratio primæ ad quartam non sit ratio numeri ad numerum; prima, & secunda magnitudo, tum secunda, & tertia &c. erunt tum in seipsis, tum in tertia potentia incommensurabiles. *Siquidem eæ magnitudines sunt incommensurabiles, tum in se, tum* in potentia, *quarum cubi eam habent rationem, quæ numeris exprimi nequit, ut ostendimus n.* 7.

Reliquæ Euclidis definitiones suis locis explicabuntur, ubi nimirum theoremata, quæ iis innituntur, erunt demonstranda. Et quoniam in eorundem theorematum explicatione aliam ab ea, quam Euclides, ejusque Interpretes tenuerunt, viam, ac rationem insistimus, nonnulla axiomata, quibus passim utendum nobis erit, hic ponemus.

AXIOMATA.

I. Rationes æquales eundem habent exponentem. *Siquidem exponens rationis exprimit ejusdem rationis quantitatem, quæ in rationibus æqualibus eadem est.*

II. Eadem magnitudo nequit esse exponens nisi rationum æqualium.

III. Si æquales magnitudines per eandem multiplicentur, earum producta erunt æqualia. *Hoc axioma est idem fere, ac secundum libri primi; multiplicatio enim nihil est aliud, quam quædam additionis species.*

IV. Si æquales magnitudines per eandem dividantur, eæ dabunt quotientes æquales. *Hoc item axioma idem est ac tertium libri primi; quum divisio sit quædam subtractionis species.*

V. Si inæquales magnitudines per eandem seorsum multiplicentur, earum producta erunt inæqualia. *Hinc si* 2, *&* 3 *seorsum multiplicentur per* 4, *productum* 3 *per* 4, *nempe* 12, *major erit producto* 2 *per* 4, *scilicet* 8.

VI. Si inæquales magnitudines per eandem seorsum dividantur, harum divisionum quotientes erunt inæquales. *Hinc quotiens numeri* 16 *divisi per* 2, *nimirum* 8, *major est quam quotiens numeri* 12 *divisi per eundem* 2; *videlicet* 6.



LEM-

IN *qualibet ratione terminus major æqualis est termino minori multiplicato per quotientem ejusdem termini majoris divisi per minorem*.

Dico, si in hac ratione b *ad* d *terminus* d, *quem ponimus esse majorem, dividatur per* b, *terminum* d *esse æqualem termino minori* b *multiplicato per quotientem divisionis ejusdem* d. *Id autem evidens est ex iis, quæ diximus in Algebræ compendio*, §. 5. *Si enim dividatur* d *per* b, *& quotiens divisionis* $\frac{d}{b}$ *ponatur esse* q, *multiplicato divisore* b *per quotientem* q, *productum* qb *æquale erit magnitudini dividendæ, scilicet* d; quod ostendendum susceperamus.

COROLLARIUM.

Hinc colligi potest, exponentem rationis esse quotientem termini majoris divisi per minorem; hinc exponens rationis b *ad* d, *seu ad* qb, *est* q; *nam hæc magnitudo exprimit, quoties* b *continetur in* d, *ut diximus ad def. VI. Hunc autem quotientem termini majoris divisi per minorem, claritatis gratia, vocabimus* q. *Eandem ob rem in exemplis, quæ afferemus, consequentes rationum ponemus majores esse antecedentibus; nam sive consequens ponatur major, sive minor antecedente, id perinde se habet; si enim* b *esset major* d, *esset* b = qd *per eandem demonstrationem*.

Sex priores Euclidis Propositiones in nostra methodo minime sunt necessariæ.

PROPOSITIO VII.

THEOREMA VII.

ÆQuales magnitudines eandem rationem habent ad tertiam quampiam ; & vicissim hæc eandem ad æquales :

Dico 1, si sit $b = d$, eandem esse rationem b ad tertiam quampiam, puta m, ac d ad eandem m; quare erit $b, m :: d, m$.

DEMONSTRATIO.

Quoniam b est æqualis d, si tertia magnitudo m dividatur per b, & quotiens divisionis sit q, eadem magnitudo q erit quotiens ejusdem m divisæ per d (*per ax.* 4) Quocirca q erit exponens utriusque rationis b ad m, & d ad m (*per Lemma præcedens*) & proinde eæ erunt æquales (*per ax.* 1.) *quod primum erat ostendendum*.

Dico 2, si sit $b = d$, esse $m, b :: m, d$. Id autem evidens est ex superiori demonstratione ; siquidem si utraque magnitudo b & d per m dividatur, idem erit utriusque divisionis quotiens (*per ax.* 4.) *quod demonstrandum supererat.*

Propositio VIII. videtur inutilis.

PROPOSITIO IX.

THEOREMA IX.

MAgnitudines, quæ eandem rationem habent ad tertiam, sunt æquales; itemque illæ, ad quas tertia quæpiam eandem habet rationem, sunt æquales.

Dico 1, si eadem sit ratio b ad m, ac d ad m, b esse æqualem d.

DEMONSTRATIO.

Quoniam duæ rationes b ad m, & d ad m sunt æquales, idem erit utriusque quotiens, seu exponens (*per ax.* 1.) videlicet q; atque adeo (*per Lemma* 1.) erit $qb = m$, non minus ac $qd = m$, proindeque (*per axi.* 1. *libr.* 1.) erit $qb = qd$, quæ ambo si dividantur per q; remanebit (*per ax.* 4.) $b = d$; *quod erat ostendendum*.

Dico 2, si eadem sit ratio m ad b, ac m ad d, esse $b = d$. Id autem evidens est. Nam utraque ratio eundem habebit exponentem, v. g. q (*per axi.* 1.) & (*per Lemma* 1.) erit $qm = b$, non minus ac $qm = d$; atqui $qm = qm$; ergo etiam $b = d$, *quod ostendendum supererat*.

Propositio X in nostra methodo nullius est usus.

PROPOSITIO XI.

THEOREMA XI.

Rationes, quæ alicui rationi sunt æquales, sunt inter se æquales.

Dico, si ratio *b* ad *d* æqualis sit rationi *x* ad *z*, itemque ratio *f* ad *g* æqualis sit eidem rationi *x* ad *z*; rationem *b* ad *d* æqualem esse rationi *f* ad *g*. seu esse *b*, *d* :: *f*, *g*.

DEMONSTRATIO.

Quoniam ratio *b* ad *d* æqualis est (*ex hyp.*) rationi *x* ad *z*, exponens rationis *b* ad *d*, seu quotiens consequentis *d* divisi per *b*, erit idem (*per ax.* 1.) ac exponens rationis *x* ad *z*, seu quotiens consequentis z divisi per *x*, ex. g. *q*. Et quoniam ratio *x* ad *z* eadem est, ac ratio *f* ad *g* (*ex hyp.*) exponens autem rationis *x* ad *z* est *q*, etiam exponens rationis *f* ad *g* erit *q* (*per axi.* 1.) Quum igitur *q* sit exponens rationis *b* ad *d*, non minus ac rationis *f* ad *g*, hæ rationes erunt æquales (*per axi.* 2.) *quod ostendendum susceperamus.*



PRO-

PROPOSITIO XII.

THEOREMA XII.

SI plures magnitudines ſint proportionales, eadem erit ratio unius antecedentis ad ſuum conſequentem, ac ſummæ omnium antecedentium ad ſummam omnium conſequentium.

Dico, ſi ſint quatuor magnitudines proportionales b, d, f, g, ita ut b ſit ad d, ut f eſt ad g, ſummam $b+f$ eſſe ad ſummam $d+g$, ut b eſt ad d.

DEMONSTRATIO.

Quoniam b eſt ad d, ut f ad g, idem erit (*per ax.* 1.) exponens, ſeu quotiens conſequentis d diviſi per b, ac conſequentis g diviſi per f, v. g. q; quare (*per Lemma* 1.) idem erit $b, d :: f, g$, ac $b, qb :: f, qf$. Si itaque addatur primo antecedenti b alter antecedens f, & conſequenti d, ſive qb, alter conſequens g, ſive qf, eadem erit ratio $b+f$ ad $d+g$, ac $b+f$ ad $qb+qf$. Oſtendendum modo eſt rationem $b+f$ ad $qb+qf$ æqualem eſſe rationi b ad d.

Dividatur primus conſequens $qb+qf$ per primum antecedentem $b+f$, quotiens hujus diviſionis erit q; nam ſi multiplices $b+f$ per q, productum erit $qb+qf$. Atqui quotiens alterius conſequentis d diviſi per b eſt item q, (*ex hyp.*) Ergo (*per axioma* 2.) ratio $b+f$ ad $qb+qf$, ſive ad $d+g$, eadem eſt, ac ratio b ad d; *quod erat oſtendendum*.

PROPOSITIO XIII.

THEOREMA XIII.

SI ex duabus rationibus æqualibus altera sit major tertia; altera etiam erit major tertia.

Hæc propositio per se evidens est, quum sit consectarium axiomatis II. Si enim ex duabus rationibus æqualibus, ideſt (*per axi.* 1.) eundem exponentem habentibus, altera sit major tertia, ejus exponens (*per def.* 7.) erit major hujus exponente; & proinde etiam exponens alterius sibi æqualis exponente ejusdem tertiæ rationis major erit, alias eadem magnitudo esset exponens duarum rationum inæqualium, quod est absurdum (*per ax.* 2.)

PROPOSITIO XIV.

THEOREMA XIV.

SI quatuor magnitudinum proportionalium, prima est, vel major, vel minor, vel æqualis tertiæ, secunda etiam erit major, vel minor, vel æqualis quartæ.

Dico 1, si ex quatuor magnitudinibus proportionalibus *b*, *d*, *f*, *g*, primus antecedens *b* sit major secundo antecedente *f*, primum consequentem *d* esse quoque majorem secundo consequente *g*.

DE-

DEMONSTRATIO.

Quoniam $b, d :: f, g$, (*ex hypoth.*) idem erit quotiens consequentis d divisi per b, ac consequentis g divisi per f (*per axi.* 1.) sit igitur utriusque rationis æqualis exponens q; quocirca erit $qb = d$, non minus ac $qf = g$: atqui b major est, quam f (*ex hyp.*) ergo (*per axi* 5.) qb, seu d major erit qf, seu g; *quod primum erat ostendendum*.

Dico 2, si in hac proportione $b, d :: f, g$, primus antecedens b minor sit secundo f, primum consequentem d minorem esse secundo g.

DEMONSTRATIO.

Manifestum est, ut in superiore demonstratione, esse $qb = d$, non minus, quam $qf = g$; atqui b minor est, quam f (*ex hyp.*) ergo qb seu d minor erit qf, seu g (*per ax.* 5.) *quod secundum erat ostendendum*.

Dico 3, si in hac proportione $b, d :: f, g$, primus antecedens b æqualis sit secundo antecedenti f, primum consequentem d esse item æqualem secundo consequenti g.

DEMONSTRATIO.

Manifestum est, ut in prima demonstratione, esse $qb = d$, non minus, ac $qf = g$; atqui b est æqualis f (*ex hyp.*) Ergo (*per axi.* 3.) qb, sive d æqualis erit qf sive g; *quod demonstrandum supererat*.

LEMMA II.

Si quatuor magnitudines sint porportionales, productum extremarum æquale erit producto mediarum.

Dico, si quatuor magnitudines b, d, f, g, *sint proportionales, productum duarum extremarum* b, *&* g, *videlicet* bg, *æquale esse producto mediarum* d, *&* f, *scilicet* df.

DEMONSTRATIO.

Quoniam duæ rationes b *ad* d, *&* f *ad* g *sunt æquales* (ex hyp.) *eundem habebunt exponentem* (per ax. 1.) *Quare si* q *ponatur esse exponens rationis* b *ad* d; *idem erit etiam exponens rationis* f *ad* g; *ac proinde* (per Lemma 1.) *erit* qb = d, *non minus, ac* qf = g; *itaque hæc proportio* b, d :: f, g *sic exprimi poterit* b, qb :: f, qf, *atqui in hac proportione* b, qb :: f, qf, *productum extremarum* b, *&* qf *idem est, ac productum mediarum* qb, *&* f, *videlicet* qbf; *ergo in priore etiam erit* bg = df; quod erat ostendendum.

LEMMA III.

Si in quatuor magnitudinibus productum duarum extremarum æquale sit producto mediarum, eæ erunt proportionales.

Dico, si in quatuor magnitudinibus b, d, f, g *productum duarum extremarum, scilicet* bg, *æquale sit producto mediarum nempe* df, *eas esse proportionales.*

DEMONSTRATIO.

Si dividatur secunda magnitudo d *per primam* b, *& hujus divisionis quotiens ponatur esse* x; *erit* (per Lemma 1.) xb = d. *Item si dividatur quarta* g *per tertiam* f, *& ejus quotiens sit* z, *erit* zf = g; *atqui* bg = df (ex hyp.) *ergo* bzf = xbf. *Quare si ambæ magnitudines æquales* bzf, xbf *dividantur per eandem* bf, *remanebit* (per axi. 4.) x *quotiens rationis* b *ad* xb, *seu* d, *æqualis* z, *qui est quotiens rationis* f *ad* zf, *seu* g; *atque adeo duæ rationes* b *ad* d, *&* f *ad* g *erunt æquales*; (per axi. 2.) quod ostendendum susceperamus.

PROPOSITIO XV.

THEOREMA XV.

Æquimultiplæ plurium magnitudinum, & earum partes aliquotæ in eadem sunt ratione.

Dico, duas magnitudines *ad*, *bd*, quæ sunt æquimultiplæ duarum *a*, & *b* (*ex dictis ad def.* 3.) habere eandem rationem ac earum æquisubmultiplas *a*; & *b*, quare si *ad* sit vel dupla, vel tripla, vel quadrupla alterius *a*, etiam *bd* erit vel dupla, vel tripla, vel quadrupla alterius *b*.

DEMONSTRATIO.

Quoniam in quatuor magnitudinibus propositis *ad*, *bd*, *a*, *b* productum extremarum *ad*, & *b* idem est, ac productum mediarum *bd*, & *a*, nimirum *abd*, hæ erunt proportionales (*per Lemma* 3.) *quod erat ostendendum*.

Si duæ magnitudines per eandem multiplicentur, ut a, & b per d, duo producta ab, ad erunt in eadem ratione, ac duæ a. & b.

PROPOSITIO XVI.

THEOREMA XVI.

Ratio permutata.

SI quatuor magnitudines sint proportionales etiam permutatim, seu alternatim proportionales erunt.

Ratio permutata, seu *alterna* dicitur, quamdo in aliqua proportione antecedens secundæ rationis ponitur loco consequentis prioris rationis, & vicissim consequens prioris evadit antecedens secundæ, qua facta permutatione adhuc perseverat proportio, ut modo ostendemus.

Dico itaque, si quatuor magnitudines b, d, f, g sint proportionales, etiam permutando hoc modo b, f, d, g proportionales erunt.

DEMONSTRATIO.

Quoniam quatuor magnitudines b, d, f, g, sunt proportionales (*ex hyp.*) productum extremarum bg æquale erit producto df mediarum (*per Lemmà* 2.) Atqui productum mediarum fd idem est, ac productum df (*ut notavimus in Algebræ compendio* § 9. *n.* 7.) nam perinde se habet, sive multiplices d per f, ac f per d; Ergo si est b, d :: f, g, erit etiam b, f :: d, g; *quod erat ostendendum.*

SCHO-

S C H O L I O N

Ratio inversa.

Eadem ratione demonstrabitur id, quod propositione quarta ostendit Euclides, quam prætervimus, nimirum, si quatuor magnitudines b, d, f, g sint proportionales, etiam *invertendo* (hoc modo d, b, g, f) erunt proportionales, nam quum in hac proportione $b, d :: f, g$ productum extremarum bg æquale sit producto mediarum df, etiam in quatuor d, gb, f eadem producta erunt æqualia, proindeque erit $d, b :: g, f$; quæ sane dicitur *ratio inversa*, fitque, quum uterque antecedens terminus loco consequentis ponitur, & vicissim.

P R O P O S I T I O XVII.

THEOREMA XVII.

Divisio rationis.

SI quatuor magnitudines sint proportionales, divisæ quoque proportionales erunt.

Divisio rationis, seu *ratio divisa* est, quum in aliqua proportione, loco antecedentis, ponitur excessus antecedentis comparate ad consequentem, quo non obstante proportio subsistit.

Dico, si quatuor magnitudines ad, a, bd, b sint proportionales, ut revera sunt (*per Lemma* 3.) itaut eadem sit ratio ad ad a, ac bd ad b; eadem erit ratio $ad - a$ ad a, ac $bd - b$ ad b.

DEMONSTRATIO.

Quoniam quatuor magnitudinum $ad - a$, a, $bd - b$, b, si multiplicentur extremæ $ad - a$, & b, idem productum dabunt, ac si multiplicentur duæ mediæ a, $bd - b$, nimirum $abd - ab$; hæ erunt proportionales (*per Lemma* 3.) *quod erat ostendendum.*

SCHOLION.

Conversio rationis.

Divisio rationis (quæ melius *subtractio* dicenda foret) antecedentes terminos consequentibus majores esse postulat. Quod si antecedentes minores sint consequentibus, tum divisio rationis eo modo explicata locum habére nequit; quare ea generalius definiri potest, quum nempe, loco excessus antecedentis comparate ad consequentem, sumitur differentia ejusdem antecedentis comparate ad eundem consequentem, quæ *conversio rationis* dicitur, quo casu proportio subsistit, ut adhibita eadem demonstratione liquet.

COROLLARIUM.

Si duæ magnitudines per eandem dividantur, ut ad, bd per d, eædem erunt duobus quotientibus a, & b proportionales; quare erit $ad, a :: bd, b$.



PRO-

PROPOSITIO XVIII.

THEOREMA XVIII.

Compositio rationis.

SI quatuor magnitudines sint proportionales, compositæ pariter proportionales erunt.

Compositio rationis dicitur, quum, loco antecedentis, ponitur summa; tum antecedentis, tum consequentis, quo casu proportio utique subsistit.

Dico, si quatuor magnitudines a, ad, b, bd sint proportionales, ut reverà sunt (*per Lem. 3.*) ita ut eadem sit ratio a ad ad, ac b ad bd, compositas etiam proportionales esse; proindeque eandem esse rationem $a + ad$ ad ad, ac $b + bd$ ad bd.

DEMONSTRATIO.

Si ex quatuor magnitudinibus $a + ad$, ad, $b + bd$, bd multiplicentur duæ extremæ $a + ad$, & bd idem productum dabunt, ac si multiplicentur duæ mediæ ad, & $b + bd$, nimirum $abd + abdd$; ergo erit (*per Lemma* 3.) $a + ad$, ad :: $b + bd$, bd; *quod erat ostendendum.*

SCHOLION.

Compositio rationis alio modo fieri potest, nimirum, quum summa, tum antecedentis, tum consequentis ponitur non loco antecedentis, sed loco consequentis, quo casu proportio subsistit, ut patet, nam in hisce quatuor magnitudinibus a, $a + ad$, b, $b + bd$, productum extremarum a, $b + bd$ æquale est producto mediarum $a + ad$, b, nimirum $ab + abd$. Id autem ostendit

Eu-

Euclides in corollario Propositionis XIX, quam, non secus ac XX, & XXI, quæ inutiles videntur, omittimus.

PROPOSITIO XXII.

THEOREMA XXII.

Proportio ordinata.

SI fuerint plures magnitudines in duplici serie constitutæ proportionem ordinatam habentes, ratio duarum extremarum ex una parte æqualis erit rationi duarum extremarum ex alia.

Proportio ordinata, seu *ratio æqualitatis cum ordine*, est quum plures magnitudines ex una parte sunt proportionales totidem magnitudinibus ex alia parte; adeout prima unius ordinis sit ad secundam ejusdem ordinis, ut prima alterius ordinis est ad secundam item alterius ordinis; itemque ut secunda unius ordinis est ad tertiam, ita secunda alterius ordinis sit ad tertiam, & sic deinceps. Sint igitur tres magnitudines ex una parte *a*, *b*, *e*; ex alia vero *c*, *d*, *f*, ita ut prima prioris ordinis *a* sit ad secundam *b* ejusdem ordinis, ut prima alterius ordinis *c* est ad secundam *d* ejusdem ordinis, itemque secunda *b* sit ad tertiam *e* in primo ordine, ut secunda *d* ad tertiam *f* in secundo ordine; hoc posito

Dico, primam prioris ordinis *a* esse ad tertiam *e*, ut prima *c* secundi ordinis est ad tertiam *f*.

DE-

DEMONSTRATIO.

Quoniam *a*, *b* : : *c*, *d*, itemque *b*, *e* : : *d*, *f* (*ex hyp.*) erit *ad* = *bc*, & insuper *ed* = *bf* (*per Lemma* 2.) & proinde ratio *ad* ad *bc* erit similis rationi *ed* ad *bf*, quum ambæ sint rationes æqualitatis. Quare alternando (*per* 16.) erit *ad*, *ed* : : *bc* *bf*. Atqui *ad*, *ed* : : *a*, *e*; & insuper *bc*, *bf*, : : *c*, *f* (*per* 15.) Ergo (*per* 11.) *a*, *e* : : *c*, *f*; *quod erat ostendendum*.

PROPOSITIO XXIII.

THEOREMA XXIII.

Ratio perturbata.

Si fuerint plures magnitudines in duplici serie constitutæ proportionem perturbatam habentes; ratio duarum extremarum ex una parte æqualis erit rationi duarum extremarum ex alia.

Ratio, seu *proportio perturbata* est, quum plures magnitudines ex una parte ita sunt proportionales, totidem magnitudinibus ex altera parte, ut tamen prima unius ordinis sit ad secundam ejusdem ordinis, ut penultima alterius ordinis est ad ultimam; itemque secunda prioris ordinis sit ad tertiam, ut antepenultima alterius ordinis est ad penultimam, & sic deinceps, donec penultima primi ordinis sit ad ultimam, ut prima alterius est ad secundam. Sint igitur ex una part tres magnitudines *a*, *b*, *e*, ex alia vero *c*, *d*, *f*, quæ ita se habeant, ut prima *a* sit ad secundam *b* in prima serie, ut penultima *d* est ad ultimam *f* in altera serie; itemque secunda *b* sit ad tertiam *e* in pri-

mo

mo ordine, ut prima c est ad secundam d in secundo ordine; hoc posito

Dico, primam a esse ad tertiam e in primo ordine, ut prima secundi ordinis c est ad tertiam f.

DEMONSTRATIO.

Quoniam $a, b :: d, f$, & insuper $b, e :: c, d$ (*ex hyp.*) erit (*per Lemma 2.*) $af = bd = ec$; proindeque $af, ef :: ec, ef$ (*per 7.*) Atqui $af, ef :: a, e$; & insuper $ec, ef :: c, f$ (*per 15.*) ergo (*per 11.*) $a, e :: c, f$; *quod erat ostendendum*.

PROPOSITIO XXIV.

THEOREMA XXIV.

SI ex sex magnitudinibus ratio primæ ad secundam æqualis sit rationi tertiæ ad quartam, itemque ratio quintæ ad secundam æqualis sit rationi sextæ ad quartam, summa primæ, & quintæ erit ad secundam, ut summa tertiæ & sextæ est ad quartam.

Si sint sex magnitudines $a, b, c, d\ e, f$, sitque $a, b :: c, d$, & similiter $e, b :: f, d$, dico, $a + e, b, :: c + f, d$.



DE-

DEMONSTRATIO.

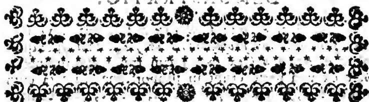
Quoniam $e, b :: f, d$ (*ex hyp.*) erit invertendo (*per Scholion propositionis* 16) $b, e :: d, f$; & quoniam $a, b :: c, d$ (*ex hyp.*) jam tres magnitudines a, b, e ex una parte erunt in proportione ordinata cum tribus c, d, f; quare (*per* 22.) $a, e :: c, f$; & componendo (*per* 18.) $a + e, e :: c + f, f$; item permutando (*per* 16.) $a + e, c + f :: e, f$. Quoniam autem $e, b :: f, d$ (*ex hyp.*) & permutando (*per* 16.) $e, f :: b, d$; ergo $a + e, c + f :: b, d$ (*per* 11.) proindeque permutando $a + e, b :: c + f, d$; *quod ostendendum susceperamus*.

COROLLARIUM.

Si sint $a, b :: c, d$, & $e, f :: g, h$, erit $ae, bf :: cg, dh$. Nam $ad = bc$, & $eh = fg$ (*per Lemm.* 2) ergo (*per axi.* 3.) $adeh = bcfg$; sive, quod idem est, $aedh = bfcg$, & proinde (*per Lemm.* 3) $ae, bf :: cg, dh$.

Propositio XXV, una cum novem reliquis est nullius usus, eo vel magis, quod ex hactenus demonstratis facile colliguntur.

Finis Libri Quinti.



LIBER SESTUS.



Proportionis natura in genere explicata, ad eam figuris planis applicandam progredimur cum Euclide, eorum tum latera, tum areas simul comparando; ex quo colligere licet, librum hunc esse totius Geometriæ fundamentum; hinc enim quum instrumentorum mathematicorum constructio, ut *Graphometri*, *Astrolabii*, *Quadrati Geometrici*, *&c.* tum eorum usus innotescit. Quin etiam omnes Mechanicæ leges, atque eæ præsertim, quæ circa pondera ad æquilibrium perducenda versantur, hujus libri præsertim propositionibus innituntur.

DEFINITIONES.

I. S*imiles figuræ* sunt, quæ singulos angulos singulis æquales habent, & latera æqualibus angulis subtensa proportionalia.

Itaque duæ figuræ planæ ABC, BDE (fig. 18. tab. 4.) *similes sunt, si angulus A trianguli ABC æqualis sit angulo DBE trianguli BDE, angulus ACB*

ACB angulo BED, & angulus CBA angulo D, & insuper latus AB sit ad latus BC, ut latus BD ad latus DE; itemque latus AB sit ad latus AC, ut latus BD ad latus BE.

II. *Reciprocæ figuræ* sunt, quarum latera ita simul comparari possunt, ut antecedens unius rationis, & consequens alterius sint in eadem figura.

Si igitur latus AD rectanguli DC (fig. 19. tab. 4.) *sit ad latus AB rectanguli BE, ut latus AE ejusdem rectanguli est ad latus AC alterius, sive sint AD, AB :: AE, AC, duo rectangula CD, BE erunt reciproca.*

III. Linea recta per *mediam, & extremam rationem divisa* dicitur, quando tota est ad segmentum majus, ut segmentum majus est ad segmentum minus. *Hæc autem linea hoc modo divisa tres magnitudines continue proportionales exhibet, quarum media, nimirum segmentum majus, dicitur* media proportionalis.

IV. *Altitudo figuræ* est perpendicularis a vertice figuræ ad basim deducta. *Itaque altitudo trianguli ABC* (fig. 20. tab. 4.) *est linea AF a vertice A ad basim BC ad angulos rectos ducta. Manifestum est, si duo triangula, vel duo parallelogramma super eandem basim constituta sint ejusdem altitudinis, eadem esse intra easdem parallelas constituta; & vicissim, si sint intra easdem parallelas constituta, esse ejusdem altitudinis.*

PROPOSITIO I.

THEOREMA I.

Triangula, & parallelogramma ejusdem altitudinis sunt inter se, quemadmodum eorum bases.

Dico 1. Si bina triangula BAC, CDE (*fig.* 10. *tab.* 4.) sint ejusdem altitudinis, triangulum BAC esse ad triangulum CDE, ut basis BC ad basim CE.

PRÆPARATIO.

Dividantur bifariam ambæ bases CB, CD in punctis F, G, junganturque rectæ AF, DG; quo facto, manifestum est, duo triangula FAC, FAB esse æqualia (*per* 37. 1.) non minus ac duo GDE, GDC. Unde totum triangulum ABC erit duplum trianguli ABF, vel ACF, quemadmodum basis BC est dupla basis BF, vel FC (*per constr.*) & insuper totum triangulum CDE erit duplum trianguli CDG, vel GDE, ut basis CE est dupla basis CG. Ex quo concludi potest, (*per* 15. 5.) rationem basis BC ad sui dimidium BF æqualem esse rationi trianguli ABC ad triangulum ABF; & similiter rationem basis CE ad sui dimidium CG æqualem esse rationi trianguli CDE ad sui dimidium CDG.

DEMONSTRATIO.

His positis, quoniam ratio BC ad BF æqualis est rationi CE ad CG; & similiter ratio trianguli ABC ad triangulum ABF æqualis est rationi trianguli CDE ad triangulum CDG, proportio, quæ est inter quatuor triangula ABC, ABF, CDE, CDG similis est pro-

por-

portioni, quæ est inter quatuor lineas BC, BF, CE, CG; quare permutando (*per* 16. 5.) proportio, quæ est inter quatuor triangula ABC, CDE, ABF, CDG, erit æqualis proportioni, quæ est inter quatuor lineas BC, CE, BF, CG; proindeque primum triangulum ABC erit ad secundum CDE, sicut prima basis BC est ad alteram CE; *quod primum erat ostendendum.*

Dico 2. Parallelogramma ejusdem altitudinis esse in eadem ratione, in qua sunt eorum bases; id quod sane evidens est (*per* 15.5.) Nam quum parallelogramma sint dupla triangulorum eandem basim habentium, & intra easdem parallelas contentorum (*per* 37. 1.) erunt in eadem ratione, in qua sunt eadem triangula; *quod demonstrandum supererat.*

PROPOSITIO II.

THEOREMA II.

SI intra triangulum ducatur recta lateri cuivis parallela, hæc linea duo latera trianguli, in quæ incidit, proportionaliter secabit. Si vero duo latera trianguli proportionaliter secta fuerint, recta linea ea proportionaliter secans erit tertio lateri parallela.

Dico 1, si in triangulo ABC (*fig.* 21. *tab.* 4.) ducatur recta DE parallela lateri AB, eam duo latera AC, BC proportionaliter secturam; adeout pars AD sit ad partem CD, ut pars BE ad partem CE.

Ductis duabus rectis AE, BD, manifestum est, triangula AED, DEC, quæ eandem habent altitudinem in E, esse inter se, ut eorum bases AD, CD (*per* 1.) Eadem ratione ostendi potest; duo triangula BDE, CDE, quæ eandem altitudinem in D habent, esse inter se, ut eorum bases BE, CE; & quoniam duo triangula DAE, DBE, quæ eandem habent basim DE, & sunt intra easdem parallelas AB, DE (*ex hyp.*) sunt æqualia (*per* 37. 1.) eadem erit ratio trianguli CDE ad triangulum DAE, ac ejusdem CDE ad triangulum DBE (*per* 7. 5.) proindeque (*per* 11. 5.) eadem erit ratio basis CD ad basim DA, ac basis CE ad basim EB; *quod primum erat ostendendum*.

Dico 2, si quatuor lineæ CD, AD, CE, EB sint proportionales, rectam DE parallelam esse basi AB.

DEMONSTRATIO.

Ductis, ut antea, duabus rectis AE, BD; Quoniam quatuor lineæ CD, AD, CE, EB sunt proportionales (*ex hyp.*) ratio duorum triangulorum CED, DEA, quæ habent eandem altitudinem in E, æqualis erit rationi duorum CDE, BDE ejusdem altitudinis in D (*per* 1.) Quare duo triangula DEA, DEB, quæ ad idem triangulum CED eandem rationem habent, erunt æqualia. (*per* 9. 5.) Cumque eandem habeant basim DE, erunt intra duas parallelas AB, DE constituta (*per* 39. 1.) *quod demonstrandum supererat*.



PROPOSITIO III.

THEOREMA III.

Linea trianguli angulum bifariam dividens, si in basim incidat, basis segmenta erunt lateribus trianguli proportionalia. Si vero linea basim trianguli proportionaliter comparate ad latera dividat, angulum basi oppositum bifariam secabit.

Dico 1, si recta AD (*fig.* 12. *tab.* 4.) angulum BAC trianguli ABC bifariam dividat, eandem productam ita basim BC secare debere, ut pars BD sit ad partem DC, ut latus AB ad latus AC.

PRÆPARATIO.

Producatur alterum latus quodquumque, v. g. AC in E, ita ut recta AE æqualis sit lateri AB; jungaturque recta BE.

DEMONSTRATIO.

Quoniam triangulum ABE est isosceles (*per const.*) angulus E æqualis erit angulo ABE (*per* 5. 1.) Et quoniam angulus exterior BAC, qui est duplus anguli BAD (*ex hyp.*) æqualis est duobus interioribus oppositis E, & ABE (*per* 32. 1.) erit duplus utriusque seorsum sumti, proindeque anguli ABE; quare duo anguli alterni ABE, BAD erunt æquales, & (*per* 27. 1.) recta AD erit rectæ BE parallela; atque adeo (*per* 2.) in triangulo BCE ratio duarum partium CD, DB similis erit rationi duarum CA, AE, seu CA, AB; *quod primum erat ostendendum.*

Di-

Dico 2, si ratio BD ad DC æqualis sit rationi AB ad AC, angulum BAC esse bifariam divisum.

DEMONSTRATIO.

Eadem manente præparatione; quoniam ratio BD ad CD æqualis est (*ex hyp.*) rationi AB ad AC, vel AE ad AC, linea AD est parallela basi BE trianguli BCE (*per* 2.) & (*per* 29. 1.) angulus BAD æqualis est angulo alterno ABE, ac proinde etiam angulo E ipsi æquali (*per constr.*) Quumque angulus BAC sit duplus anguli E (*per* 32. 1.) erit quoque duplus anguli BAD, qui idcirco erit æqualis angulo CAD; *quod ostendendum susceperamus*.

PROPOSITIO IV.

THEOREMA IV.

Triangula sibi mutuo æquiangula latera habent proportionalia.

Dico, si bina triangula ABC, BED (*fig.* 18. *tab.* 4.) sint æquiangula, itaut angulus A trianguli ABC sit æqualis angulo DBE trianguli BDE, angulus ACB angulo BED, angulus denique CBA, angulo EDB, rationem duorum laterum AB, BD, quæ angulis æqualibus sunt opposita, æqualem esse rationi duorum BC, DE, & insuper rationi duorum AC, BE, quæ æqualibus angulis pariter subtenduntur.

PRÆ-

PRÆPARATIO.

Collocentur duo triangula, ita ut duo latera AB, BD sint in directum opposita; deinde producantur duo latera AC, DE donec sibi occurrant in F.

DEMONSTRATIO.

Quoniam ABD est recta linea (*per constr.*) & angulus ADF æqualis est angulo ABC (*ex hyp.*) linea CB erit (*per* 28. 1.) parallela lineæ DF. Similiter quoniam angulus A æqualis est angulo DBE, linea BE erit parallela lineæ AF. Quare figura BCFE est parallelogrammum, cujus duo latera BC, EF sunt inter se æqualia (*per* 34. 1.) non secus, ac duo opposita BE, CF. Ergo in triangulo ADF, ob lineam BC parallelam lineæ DF, ratio AB ad BD æqualis est (*per* 2.) rationi AC ad CF, vel BE ipsi æquali; itemque ob lineam BE parallelam lineæ AF, ratio DB ad BA æqualis est rationi DE ad EF vel BC; *quod operæpretium erat demonstrare.*

COROLLARIUM I.

Ex hac demonstratione sequitur, rationem AC ad BE æqualem esse rationi BC ad DE, (*per* 11. 5.) quum ambæ rationes sint similes, seu æquales rationi AB ad BD.

COROLLARIUM II.

Sequitur etiam (*per* 16. 5.) duo latera unius trianguli esse proportionalia duobus lateribus alterius trianguli sibi æquianguli æqualem angulum continentibus; hinc ratio AB ad AC æqualis erit rationi BD ad BE, quæ angulum DBE æqualem angulo A comprehendunt. Quum enim quatuor latera AB,

BD, AC, BE sint proportionalia, permutando etiam proportionalia erunt, hoc modo AB, AC : : BD, BE. Ex quo concluditur, triangula omnia, quæ sibi mutuo sunt æquiangula, esse similia (*per def.* 1.)

PROPOSITIO V.

THEOREMA V.

Triangula, quæ latera habent proportionalia, angulos etiam, quibus ejusdem rationis latera subtenduntur, æquales habent.

Dico, si in duobus triangulis ABC, BDE (*fig.* 18. *tab.* 4.) ratio duorum laterum AB, BC æqualis sit rationi duorum DB, DE, & ratio duorum AB, AC æqualis sit rationi duorum BD, BE, hæc duo triangula esse sibi mutuo æquiangula; quocirca angulus A æqualis erit angulo DBE, angulus ABC angulo D, angulus denique ACB angulo BED, quibus ejusdem rationis latera subtenduntur.

PRÆPARATIO.

Fiat (*per* 23. 1.) ab extremo B lateris BD angulus DBG æqualis angulo A; & ab extremo D angulus BDG æqualis angulo ABC; quocirca etiam angulus G æqualis erit angulo ACB (*per* 32. 1.)

DEMONSTRATIO.

Quoniam duo triangula ABC, BDG sunt æquiangula (*per constr.*) eadem erit ratio laterum AB, BC trianguli ABC, ac laterum BD, DG trianguli BDG (*per* 4) & quoniam eadem est ratio duorum laterum AB, BC trianguli ABC, ac duorum BD, DE tri-

trianguli BDE (*ex hypoth.*) sequitur (*per* 11. 5.) rationem duorum laterum BD, DE, æqualem esse rationi duorum BD, DG; & (*per* 14. 5.) latus DE æquale esse lateri DG. Eandem ob rem ratio duorum laterum BD, BE æqualis erit rationi duorum BD, BG, quoniam ambæ rationes sunt æquales rationi duorum laterum AB, AC; quare latus BE æquale erit lateri BG (*per* 14. 5.) atque adeo triangulum BDG, quod est æquiangulum (*per constr.*) triangulo ABC, erit æquiangulum (*per* 8. 1.) triangulo BDE, quod proinde erit pariter triangulo ABC æquiangulum; *quod demonstrare oportebat*.

PROPOSITIO VI.

THEOREMA VI.

Si triangulum angulum quemlibet angulo alterius trianguli æqualem habuerit, & latera circum æquales angulos proportionalia fuerint; ambo erunt sibi mutuo æquiangula.

Dico, si angulus A trianguli ABC (*fig.* 18. *tab.* 4.) æqualis sit angulo DBE trianguli BDE, & ratio duorum laterum AB, AC trianguli ABC æqualis sit rationi duorum laterum BD, BE trianguli BDE, hæc duo triangula esse sibi mutuo æquiangula.

DEMONSTRATIO.

Manente eadem præparatione, ut supra; quoniam duo triangula ABC, BDG sunt æquiangula (*per constr.*) ratio duorum laterum AB, AC trianguli ABC æqualis erit rationi duorum BD, BG trianguli BDG (*per* 4.) & quoniam ratio eorundem laterum AB, AC æqualis est (*ex hyp.*) rationi duorum BD, BE trianguli BDE,

evidens est, rationem BD ad BG æqualem esse (per 11. 5.) rationi BD ad BE, & (per 14. 5.) latus BG æquale esse lateri BE; quare ob angulum DBG æqualem angulo A (*per constr.*) & proinde angulo DBE, triangulum BDE (*per* 4. 1.) erit æquiangulum triangulo BDG, & proinde etiam triangulo ABC; *quod ostendendum susceperamus*.

Propositio VII inutilis videtur.

PROPOSITIO VIII.

THEOREMA VIII.

IN triangulo rectangulo recta linea ab angulo recto ad hypotenusam perpendiculariter ducta illud dividit in duo triangula tum inter se, tum toti similia.

Dico, si in triangulo BDC (*fig.* 23. *tab.* 4.) ducatur ab angulo recto D recta DA perpendicularis hypotenusæ BC, eam triangulum BDC in duo triangula ABD, ACD dividere, quæ erunt tum triangulo BDC, tum inter se similia.

DEMONSTRATIO.

Quoniam angulus BAD trianguli ABD rectus est (*ex hyp.*) summa reliquorum duorum angulorum B, & ADB, erit æqualis uni recto (*per* 32. 1.) proindeque angulo BDC (*ex hyp.*) Igitur, sublato communi angulo ADB, remanebit angulus ABD æqualis angulo ADC. Eadem ratione demonstrabitur, angulum C æqualem esse angulo ADB. Ex quo patet duo triangula ABD, ADC esse æquiangula tum inter se, tum triangulo BCD; & proinde esse similia (*per* 4.) *quod erat ostendendum*.

PRO-

PROPOSITIO IX.

PROPLEMA I.

A Data recta linea finita ordinatam partem abscindere.

Ordinata pars hic dicitur pars aliquota, quæ bis vel pluries repetita suum totum ex æquo metitur. Ut igitur a data recta AD (*fig.* 24. *tab.* 4.) abscindatur ex. g. tertia pars, ducatur a puncto A recta AE indefinita, atque in ea sumatur ad libitum pars AC, secenturque in reliqua linea CE duæ partes æquales ipsi AC, nimirum CF, FE; deinde a puncto E ad punctum D extremum datæ lineæ AD ducatur recta ED; denique a puncto C ducatur recta CB parallela rectæ ED; quæ lineam AD secans in puncto B, dabit partem AB, quam inquirimus.

DEMONSTRATIO.

Quoniam duæ rectæ BC, DE sunt parallelæ (*per constr.*) angulus ABC erit æqualis angulo ADE (*per* 29. 1.) & ob angulum communem A, triangulum ABC erit æquiangulum triangulo ADE (*per* 32. 1.) Igitur ratio duarum linearum AE, AC æqualis erit rationi duarum AD, AB (*per* 4) quumque AE sit tripla AC (*ex hyp.*) etiam AD erit tripla AB; *quod facere, & ostendere opus fuerat.*



PRO-

PROPOSITIO X.

PROBLEMA II.

DAtam lineam non sectam similiter secare, ut alia item data secta est.

Ut dividatur linea AC (*fig.* 25. *tab.* 4.) ea ratione, qua linea AD secta est in E, jungantur duæ datæ lineæ AC, AD in puncto A, junctaque recta CD, ducatur a puncto datæ sectionis E recta EB parallela lineæ CD, quo facto partes AB, BC erunt proportionales partibus AE, ED (*per* 2.) *quod erat faciendum*, *& demonstrandum*.

PROPOSITIO XI.

PROBLEMA III.

DUabus datis rectis lineis tertiam proportionalem invenire.

Ut duabus datis AD, AC (*fig.* 25. *tab.* 4.) inveniatur tertia proportionalis, ex his fiat angulus quiquumque A, sumptaque super majore AD parte AE æquali minori lineæ AC, jungantur duo extrema D, & C per rectam CD, atque à puncto E ducatur recta EB parallela rectæ CD, quæ dabit rectam AB, quæ erit tertia proportionalis, quam inquirimus.



DE-

DEMONSTRATIO.

Quoniam duo triangula ABE, ACD sunt æqui angula (*per* 32. 1.) ob angulum A communem, & ob angulum ABE æqualem angulo ACD (*per* 29. 1.) ratio duorum laterum AD, AE, seu AD, AC (*per constr.*) æqualis erit (*per* 4.) rationi duorum AC, AB, quare erit ∺ AD, AC, AB; *quod facere, & ostendere oportebat*.

SCHOLION.

Hæc problematis constructio ostendit, quomodo invenienda sit duabus datis lineis tertia proportionalis minor. Quod si datæ sint duæ rectæ AB, AE (*fig.* 25. *tab.* 4.) quibus tertiam proportionalem majorem invenire oporteat, producenda est linea AB in G, itaut AG sit æqualis AE; junctaque recta BE, a puncto G ducenda est recta CD ipsi BE parallela, quæ occurrens rectæ AE productæ in D dabit rectam AD, quæ erit tertia proportionalis, quam inquirimus, ut adhibita eadem demonstratione liquet.

PROPOSITIO XII.

PROBLEMA IV.

Tribus datis rectis lineis quartam proportionalem invenire.

Ut inveniatur quarta proportionalis tribus datis rectis lineis AC, AB, AE (*fig.* 24. *tab.* 4.) fiat ex duabus prioribus AC, AB angulus quicumque A; & constituatur tertia AE super primam AC, junctaque recta CB, ducatur ab extremo E recta ED parallela ipsi CB, quæ occurrens lineæ AB productæ in

D

D dabit rectam AD, quæ erit quarta proportionalis, quam inquirimus; siquidem ob duo triangula æquiangula ABC, ADE, eadem erit ratio duorum laterum AC, AB, ac duorum AE, AD (*per* 4) *quod erat faciendum, & demonstrandum.*

Eodem modo inveniri potest tribus datis rectis AD, AB, AE quarta proportionalis minor, ducendo nempe a puncto B rectam BC parallelam rectæ DE.

PROPOSITIO XIII.

PROBLEMA V.

Duabus datis rectis lineis mediam proportionalem invenire.

Ut inveniatur media proportionalis inter duas rectas AB, AC, (*fig.* 23. *tab.* 4.) statuantur hæ in directum, fiatque unica recta BC, circum quam describatur semicirculus BDC; denique a puncto A excitetur recta AD perpendicularis rectæ BC, quæ erit media proportionalis inter duas rectas AB, AC.

DEMONSTRATIO.

Si jungantur duæ rectæ BD, CD, apparebit, angulum BDC esse rectum (*per* 31. 3) & (*per* 8) lineam AD esse mediam proportionalem inter AB, AC; nam ob duo triangula similia ABD, ACD; ratio AB ad AD æqualis est rationi AD ad AC; *quod facere, & demonstrare oportebat.*

PRO

PROPOSITIO XIV.

THEOREMA IX.

Parallelogramma æquiangula, & æqualia latera habent reciproca; quæque sunt item æquiangula, &. latera habent reciproca, ea sunt æqualia.

Dico 1, Si duo parallelogramma AH, AG (*fig.* 19. *tab.* 4.) sint æquiangula, & æqualia, eandem esse rationem lateris AD parallelogrammi AH ad latus AB parallelogrammi AG, ac rationem lateris AE ejusdem parallelogrammi AG ad latus AC prioris parallelogrammi AH.

PRÆPARATIO.

Statuantur duo parallelogramma AH, AG, ita ut duo latera AD, AB unicam rectam constituant, quo casu etiam duo AC, AE erunt in directum constituta (*per* 15. 1.) ob angulum CAD æqualem angulo BAE (*ex hyp.*) Deinde producantur duo latera HC, GB, donec sibi occurrant in F, itaut efficiant parallelogrammum AF.

DEMONSTRATIO.

Quoniam duo parallelogramma AH, AG sunt æqualia (*ex hyp.*) eandem habebunt rationem ad parallelogrammum AF (*per* 7. 5.) Et quoniam (*per* 1.) parallelogrammum AH est ad parallelogrammum AF ejusdem altitudinis, ut basis AD est ad basim AB; & similiter parallelogrammum AG est ad idem parallelogrammum AF ut basis AE ad basim AC, manifestum est, rationem duarum linearum AD, AB æqua-

lem esse rationi duarum AE, AC (*per* 11. 5.) *quod primum erat demonstrandum*.

Dico 2, si duo parallelogramma AH, AG sint æquiangula, & latera habeant reciproca, ea esse inter se æqualia.

DEMONSTRATIO.

Manente eadem præparatione, ut supra; quoniam ratio AD ad AB æqualis est rationi AE ad AC (*ex hyp.*) ratio parallelogrammi AH ad parallelogrammum AF, erit (*per* 1.) æqualis rationi parallelogrammi AG ad eundem AF. Quare (*per* 9. 5.) duo parallelogramma AH, AG erunt æqualia; *quod demonstrandum supererat*.

Hac ferme ratione ostendunt Mechanici duo pondera mole inæqualia, quæ sunt in ratione reciproca molis, & velocitatis, esse in æquilibrio, seu tantundem motus esse in uno, ac in alio; nam quantum corpus majus vincit mole corpus minus, tantum ab eo velocitate superatur.

PROPOSITIO XV.

THEOREMA X.

TRiangula æqualia æqualem angulum habentia, quæ circum æquales angulos habent, latera sunt reciproca; & quorum latera circum æquales angulos sunt reciproca ea sunt æqualia.

Dico 1, si duo triangula ABC, DBE (*fig.* 26. *tab.* 4.) sunt æqualia, & angulus ABC æqualis est angulo DBE, rationem laterum AB, BD æqualem esse rationi laterum EB, BC.

PRÆ-

PRÆPARATIO.

Statuantur hæc duo triangula, ita ut duo latera AB, BD sint in directum constituta, quocirca etiam duo CB, BE erunt in directum constituta (*per* 15. 1.) quum angulus ABC sit æqualis angulo DBE (*ex hyp.*)

DEMONSTRATIO.

Quoniam duo triangula ABC, DBE sunt æqualia (*ex hyp.*) eandem habebunt rationem ad idem triangulum ABE (*per* 7. 5.) Et quoniam (*per* 1.) triangulum ABE est ad triangulum ABC ejusdem altitudinis in A, ut basis EB ad basim BC; & similiter idem triangulum ABE est ad triangulum DBE item ejusdem altitudinis in E, ut basis AB ad basim BD, sequitur (*per* 11. 5.) rationem AB ad BD æqualem esse rationi EB, ad BC; *quod primum erat ostendendum*.

Dico 2, si duo anguli ABC, DBE sint æquales, & quæ circum ipsos sunt latera sint in ratione reciproca, duo triangula ABC, DBE esse æqualia.

DEMONSTRATIO.

Manente eadem præparatione, ut supra; quoniam ratio AB ad BD æqualis est rationi EB, ad BC, (*ex hyp.*) ratio trianguli ABE ad triangulum ABC æqualis erit rationi ejusdem ABE ad triangulum ABD (*per* 1.) quum eorum vertices in idem punctum desinant; proindeque (*per* 9. 5.) duo triangula ABC, DBE erunt æqualia; *quod ostendendum supererat*.

PROPOSITIO XVI.

THEOREMA XI.

SI quatuor rectæ lineæ proportionales fuerint; quod sub extremis comprehenditur, rectangulum æquale est ei, quod sub mediis continetur; viciſſim ſi rectangulum, quod fit ſub duabus extremis, æquale ſit ei, quod fit ſub duabus mediis, hæ quatuor lineæ erunt proportionales.

Dico 1, ſi quatuor lineæ AB, AC, AD, AE (*fig.* 19. *tab.* 4.) ſint proportionales, quod ſub extremis AB, AE continetur rectangulum, videlicet AG, æquale eſſe rectangulo AH, quod ſub mediis AC, AD continetur. Hæc propoſitio eſt corollarium Lemmatis II, & III Libri V, alia tamen ratione hic demonſtrabitur.

DEMONSTRATIO.

Quoniam ratio AB ad AC æqualis eſt rationi AD ad AE (*ex hyp.*) hæc duo rectangula AH, AG erunt reciproca (*per def.* 2.) quumque ſint æquiangula (*per conſtr.*) erunt æqualia (*per* 14.) *quod primum oſtendere opus erat.*

Dico 2, ſi rectangulum AG, quod fit ſub extremis AB, AE, æquale ſit rectangulo AH, quod fit ſub mediis AC, AD, quatuor lineas AB, AC, AD, AE eſſe proportionales. Id autem per ſe patet; nam quum ſint æquiangula, & æqualia (*ex hyp.*) latera habent in ratione reciproca (*per* 14.) *quod oſtendendum ſupererat.*

COROLLARIUM.

Duæ lineæ intra circulum sese mutuo dividentes, sese dividunt in partes reciproce proportionales, nam rectangulum sub partibus unius æquale est rectangulo sub partibus alterius (*per* 35. 3.) Hinc patet, quatuor lineas AE, CE, ED, EB (*fig.* 2. *tab.* 4.) quæ sunt partes duarum linearum AB, CD in circulo sese mutuo dividentium, esse proportionales.

COROLLARIUM II.

Si duæ lineæ a puncto aliquo extra circulum sumto ad circuli circumferentiam concavam producantur, ut AB, AH (*fig.* 4. *tab.* 4.) ambæ totæ, & earum partes exteriores erunt reciproce proportionales; & proinde eadem erit ratio lineæ AB ad lineam AH, ac partis AI ad partem AC; nam rectangulum sub tota AH, & parte exteriore AI æquale est (*per* 36. 3.) rectangulo sub tota AB, & ejus parte exteriore AC.

PROPOSITIO XVII.

THEOREMA XII.

Si tres lineæ sint continue proportionales, rectangulum, quod fit sub extremis, æquale est quadrato, quod fit sub media. Vicissim si quadratum, quod sub media fit, sit æquale rectangulo, quod fit sub duabus extremis, hæ tres lineæ erunt continue proportionales.

Propositio hæc est corollarium præcedentis; quandoquidem tres lineæ continue proportionales æquivalent

lent quatuor proportionalibus, quarum duæ mediæ sint æquales, quo casu rectangulum, quod fit, sub mediis erit quadratum æquale rectangulo, quod fit sub extremis (*per* 16.)

COROLLARIUM.

Hinc inferri potest, lineam AE (*fig.* 3. *tab.* 4), circulum CEB tangentem esse mediam proportionalem inter totam secantem AB ab eodem puncto A ductam, & partem exteriorem AC; quoniam rectangulum sub tota AB, & parte AC æquale est (*per* 36. 3.) quadrato tangentis AE.

PROPOSITIO XVIII.

PROBLEMA VI.

Super data recta linea rectilineum describere simile alteri rectilineo dato.

In dato rectilineo ABCD (*fig.* 27. *tab.* 4.) ducatur diagonalis BD; fiat autem in puncto E rectæ EF angulus E æqualis angulo A per lineam EH, & in puncto F angulus EFH æqualis angulo ABD. Deinde fiat angulus HFG æqualis angulo DBC, & angulus FHG æqualis angulo BDC; quo facto duæ lineæ, quæ sibi occurrent in G, efficient angulum G æqualem angulo C (*per* 32. 1.) & tota figura EFGH similis erit dato rectilineo ABCD.

DEMONSTRATIO.

Evidens est (*per constr.*) duo rectilinea ABCD, EFGH esse æquiangula; siquidem duo triangula unius sunt æquiangula duobus triangulis alterius. Manifestum

festum est etiam (*per* 4.) rationem duorum laterum AB, AD æqualem esse rationi duorum EF, EH; & eandem ob rem rationem duorum CB, CD æqualem esse rationi duorum GF, GH. Ostendendum modo est, rationem duorum BA, BC æqualem esse rationi duorum FE, FG; & similiter rationem duorum DA, DC æqualem rationi duorum HE, HG.

Quoniam in duobus triangulis æquiangulis ABD, EFH ratio duorum laterum AB, BD æqualis est rationi duorum EF, FH (*per* 4.) & similiter in triangulis æquiangulis BCD, FGH ratio duorum laterum BD, BC æqualis est rationi duorum FH, FG, manifestum est, tres lineas BA, BD, BC esse in proportione ordinata cum tribus FE, FH, FG; & proinde (*per* 22. 5.) rationem primæ BA ad tertiam BC ex una parte æqualem esse rationi primæ FE ad tertiam FG ex altera. Eodem modo demonstrari potest, rationem duarum linearum DA, DC æqualem esse rationi duarum HE HI; *quod facere, & ostendere opus fuerat.*

PROPOSITIO XIX.

THEOREMA XIII.

SImilia triangula sunt in ratione duplicata rationis suorum laterum homologorum.

Latera homologa vocantur in figuris similibus, quæ æqualibus angulis subtenduntur. Hinc si duo triangula ABC, DEF (*fig.* 28. *tab.* 4.) similia sint, seu æquiangula (*per* 4.) duo latera AC, DF, quæ angulis æqualibus B, & E subtenduntur, erunt homologa; Idipsum dic de duobus AB, DE, quæ subtenduntur duobus angulis æqualibus C, & F &c. His præmissis.

Di-

Dico, rationem duorum triangulorum ABC, DEF esse duplicatam, seu duplo majorem ratione duorum laterum homologorum v. g. AB, DE. Adeout si inveniatur (*per* 11.) hisce duobus lateribus tertia proportionalis AG, triangulum ABC erit ad triangulum DEF, ut prima proportionalis AB ad tertiam AG, ut observatum est ad Defin. X Libri V.

DEMONSTRATIO.

Quoniam duo triangula ABC, DEF sunt æquiangula (*ex hyp.*) ratio duorum laterum AC, DF æqualis erit rationi duorum AB, DE, quæ pariter æqualis est rationi duorum DE, AG (*per constr.*) quum linea AG sit tertia proportionalis respectu duorum AB, DE. Quare ratio duorum laterum AC, DF erit æqualis (*per* 11. 5.) rationi duorum DE, AG, atque adeo duo triangula AGC, DEF duo latera habebunt circa æquales angulos A, & D reciproca; & proinde erunt æqualia (*per* 15.) Quum igitur triangulum ABC sit ad triangulum AGC ejusdem altitudinis, ut basis AB est ad basim AG, (*per* 1.) sequitur, triangulum ABC esse ad triangulum DEF; ut prima proportionalis AB est ad tertiam AG; *quod erat ostendendum.*

COROLLARIUM.

Ex hac propositione sequitur, triangula sibi mutuo æquiangula esse inter se, ut quadrata suorum laterum homologorum; quum enim quadrata sint inter se, sicut sui dimidia (*per* 15. 5.) si eorum dimidia, nimirum triangula similia, sunt in ratione duplata rationis suorum laterum homologorum, idipsum de quadratis dicendum erit.

PRO-

PROPOSITIO XX:

THEOREMA XIV.

Similia polygona in similia triangula dividuntur, & numero æqualia, & totis proportionalia; & insuper similia polygona sunt in ratione duplicata rationis suorum laterum homologorum.

Dico 1, Si duo polygona ABCDE, FGHIK (*fig.* 29. *tab.* 4.) sint similia, ea in totidem triangula æque dividi posse, quæ erunt tum inter se similia, tum quodlibet erit pars similis sui polygoni.

DEMONSTRATIO.

Ductis rectis DA, DB, IG, IF, manifestum est (*per* 6.) duo triangula AED, FKI esse similia ob æquales angulos E, K, obque duo latera EA, ED proportionalia duobus lateribus KF, KI (*ex hyp.*) Eadem ratione ostendes, triangulum BCD simile esse triangulo GHI; ex quo inferas licet; reliqua duo triangula ABD, FGI esse item similia, quum sint sibi mutuo æquiangula, ob angulos, qui fiunt in punctis A, B, D, æquales iis qui fiunt in punctis F, G, I; *quod primum erat ostendendum*.

Dico 2, Duo polygona similia ABCDE, FGHIK esse in ratione duplata rationis suorum laterum homologorum. Quod sane evidens est; nam triangula, ex quibus constant, quum sint similia, ut modo ostensum est, sunt (*per* 19.) in ratione duplicata rationis suorum laterum homologorum; quumque singula sint partes similes duorum polygonorum, earum tota, scilicet duo polygona, erunt in eadem ratione (*per* 15. 5.) *quod demonstrandum supererat*.

COROLLARIUM.

Polygona similia sunt inter se, ut quadrata suorum laterum; id autem ex præcedenti propositione constat..

Si quis velit polygonum augere secundum datam rationem, v.g. si quis quærat polygonum quadruplum alterius, duplicanda erunt omnia latera, si nonuplum triplicanda, &c. Nam ratio duplata rationis duplæ est quadrupla, rationis triplæ nonupla, ut notavimus ad definitionem X libri V. Si quis autem quærat polygonum duplum alterius, si id sit regulare, duplicato uno latere, invenienda est media proportionalis inter idem latus, & ejus duplum, quæ erit latus polygoni; si vero sit irregulare, tot mediæ proportionales sunt inveniendæ, quot sunt ejus latera, quæ ita disponi debent, ut angulos singulos singulis polygoni dati angulis æquales efficiant, ut docuimus in propositione XVIII. Id autem totum ex hac propositione consequitur, ut patet.

PROPOSITIO XXI.

THEOREMA XV.

QUæ eidem rectilineo sunt similia polygona, ea inter se sunt similia.

Dico, si duo rectilinea ABCD, IKLM (*fig.* 27. *tab.* 4.) sint similia tertio rectilineo EFGH, ea etiam sibi mutuo esse similia. Id autem evidens est; nam omnia in totidem triangula æque dividi possunt, (*per* 20.) quæ erunt singula singulis æquiangula, & proinde similia (*per* 4.) Quare (*per* 18.) etiam rectilinea erunt similia.

PROPOSITIO XXII.

THEOREMA XVI.

SI quatuor rectæ proportionales fuerint, similia rectilinea bina, & bina ſuper illis deſcripta proportionalia erunt; & ſi ſimilia rectilinea ſint proportionalia, ipſæ etiam quatuor rectæ lineæ erunt proportionales.

Dico 1, ſi quatuor lineæ AB, AC, AD, AE (*fig.* 1, *tab.* 5.) ſint proportionales, quatuor rectilinea ſimilia, nimirum duo triangula æquilatera, & duo quadrata, ſuper iis deſcripta eſſe proportionalia.

DEMONSTRATIO.

Quoniam duæ rationes AB ad AC, & AD ad AE ſunt æquales (*ex hyp.*) etiam earum duplatæ erunt æquales; atqui ratio duplata rationis AB ad AC eſt æqualis rationi rectilinei AB ad ſimile rectilineum AC; & ratio duplata rationis AD ad AE æqualis item eſt rationi rectilinei AD ad rectilineum ſibi ſimile AE (*per* 19. *&* 20.) Ergo quatuor rectilinea AB, AC, AD, AE ſunt proportionalia; *quod primum operæpretium erat demonſtrare*.

Dico 2, Si quatuor rectilinea ſimilia AB, AC, AD, AE bina, & bina ſimiliter deſcripta proportionalia fuerint, quatuor lineas AB, AC, AD, AE eſſe proportionales.

DEMONSTRATIO.

Quoniam ratio duorum rectilineorum AB, AC æqualis eſt rationi duorum AD, AE (*ex hyp*) & utraque eſt duplata rationis ſuorum laterum homologorum (*per* 19.

& 20.) sequitur, duas etiam rationes simplices AB nempe ad AC, AD ad AE esse æquales; *quod ostendendum supererat.*

PROPOSITIO XXIII.

THEOREMA XVII.

Parallelogramma æquiangula sunt in ratione composita rationum suorum laterum.

Dico, si duo parallelogramma CA, CF (*fig.* 1. *tab.* 5.) sint æquiangula, rationem parallelogrammi CA ad parallelogrammum CF esse compositam ex ratione, quam habet BC ad CG, & ex ratione, quam DC habet ad CE.

PRÆPARATIO.

Statuatur latus BC parallelogrammi AC in directum cum latere CG parallelogrammi CF; quo casu ob angulum BCD æqualem angulo ECG, etiam duo latera CD, CE erunt in directum constituta (*per* 15. 1.) Productis autem duobus lateribus AD, FG quatenus sibi occurrant in H, compleatur tertium parallelogrammum CH. Denique ducatur recta quæquumque terminata KI, & duobus lateribus CB, CG addita KI, inveniatur iisdem quarta proportionalis KL (*per* 12.) Rursus duobus lateribus CD, CE addita recta KL, inveniatur ipsis quarta proportionalis KM.

DEMONSTRATIO.

Quoniam duæ rationes KI ad KL, & KL ad KM sunt æquales duabus rationibus lateris CB ad CG, & lateris CD ad CE (*per constr.*) ratio KI ad KM, quæ est composita ex rationibus KI ad KL, & KL ad

KM

KM (*ex adnotatis ad def.* 10. 5.) erit composita etiam ex rationibus lateris CB ad CG, & CD ad CE. Quum autem parallelogrammum AC fit ad parallelogrammum CH, ut basis CB est ad basim CG (*per* 1.) adeoque sicut KI ad KL; parallelogrammum vero CH sit ad parallelogrammum CF, ut basis CD est ad basim CE, sive ut KL est ad KM, sequitur, parallelogrammum CA esse ad parallelogrammum CF, ut KI ad KM, adeoque rationem CA ad CF esse compositam ex duabus rationibus CB ad CG, & CD ad CE; *quod erat ostendendum*.

PROPOSITIO XXIV.

THEOREMA XVIII.

IN omni parallelogrammo, quæ circum diagonalem sunt, parallelogramma, tum sibi mutuo, tum toti similia sunt.

Dico, in parallelogrammo ABCD (*fig.* 30. *tab.* 4.) duo parallelogramma FI, HG, per quæ transit diagonalis AC, esse tum sibi mutuo, tum toti ABCD similia.

DEMONSTRATIO.

Quoniam linea HI parallela est lateri CB (*ex hyp.*) angulus AIE æqualis erit (*per* 29. 1.) angulo B. Ex quo patet, duo triangula AIE, ABC ob angulum communem in A esse similia (*per* 4.) quocirca ratio AI ad IE æqualis erit rationi AB ad BC, & (*per def.* 1.) duo parallelogramma FI, DB erunt similia. Eadem ratione ostendi potest, parallelogrammum HG simile esse eidem parallelogrammo DB; ex quo infertur, duo parallelogramma FI, HG esse etiam inter se similia (*per* 21.) *quod ostendendum proponebatur*.

SCHO-

SCHOLION.

Inversa hujus propositionis, nimirum, si duo parallelogramma FI, & HG sint tum toti BD, tum inter se similia, diagonalem AC per angulos FEI, HEG transire debere, facile ex superiori demonstratione intelligitur. Hanc autem ostendit Euclides propositione XXVI, quam idcirco omittemus.

PROPOSITIO XXV.

PROBLEMA VII.

Duobus datis rectilineis, tertium uni æquale, & alteri simile constituere.

Ut describatur rectilineum simile rectilineo AB (*fig.* 2. *tab.* 5.) & æquale rectilineo FGH, constituantur duo quadrata, nimirum quadratum AD æquale rectilineo AB, quadratum vero AE æquale rectilineo FGH (*per* 14.2.) Duorum autem quadratorum AD, AE lateribus addito latere rectilinei AB, hisce tribus lineis inveniatur quarta proportionalis AC (*per* 12), ita ut quemadmodum AD ad AE, ita sit AB ad AC, denique (*per* 18.) describatur super recta AC rectilineum simile dato rectilineo AB, quod erit æquale alteri dato FGH.

DEMONSTRATIO.

Quoniam quatuor lineæ AB, AC, AD, AE sunt proportionales (*per constr.*) rectilinea similia super iis descripta erunt proportionalia (*per* 22.) atqui rectilineum AB est æquale quadrato AD (*per constr.*) ergo (*per* 14. 5.) etiam rectilineum AC erit æquale quadrato AE, sive rectilineo FGH ipsi æquali (*per const.*)

Quod

Quod faciendum, & demonstrandum propositum fuit. *Omittimus hic propositiones XXVI, XXVII, XXVIII, & XXIX, quæ minus necessariæ videntur.*

PROPOSITIO XXX.

PROBLEMA X.

Datam rectam lineam finitam per mediam, & extremam rationem secare:

Sit data recta linea AD (*fig.* 3. *tab.* 5) quæ ita dividenda est, ut tota sit ad segmentum majus, quemadmodum segmentum majus est ad segmentum minus. Ea itaque secetur in puncto B (*per* 11. 2.) ita ut rectangulum sub tota AD & parte BD ex. g. BC æquale sit quadrato alterius partis AB, nimirum AG.

DEMONSTRATIO.

Quoniam rectangulum BC æquale est quadrato AG lineæ AB (*per constr.*) tres lineæ AD, AB, BD erunt continue proportionales (*per* 17.) & (*per def.* 1.) linea AD erit per mediam, & extremam rationem divisa; *quod facere, & demonstrare oportebat.*

PROPOSITIO XXXI.

THEOREMA XXI.

In quolibet triangulo rectangulo, si super tria latera describantur tria rectilinea similia, rectilineum hypotenusæ erit æquale duobus rectilineis aliorum laterum simul sumtis.

Dico, rectilineum hypotenusæ BC (*fig.* 4. *tab.* 5.) seu

seu triangulum æquilaterum BCF, æquale esse duobus triangulis item æquilateris ABD, ACE, quæ facta sunt super reliquis duobus lateribus trianguli rectanguli ABC.

DEMONSTRATIO.

Quoniam (*per* 20.) rectilineum ABD est ad rectilineum simile ACE, quemadmodum quadratum AB ad quadratum AC, componendo (*per* 18. 5.) summa ABD + ACE erit ad ACE, ut summa quadratorum AB + AC, sive (*per* 47. 1.) ut solum quadratum BC ad quadratum AC. Et quoniam ratio quadrati BC ad quadratum AC æqualis est (*per* 20.) rationi rectilinei BCF ad rectilineum ACE, manifestum est, (*per* 11. 5.) rationem rectilinei BCF ad rectilineum ACE æqualem esse rationi summæ duorum rectilineorum ABD + ACE ad ipsum ACE, & (*per* 9. 5.) duo rectilinea ABD, & ACE esse simul æqualia rectilineo BCF; *quod operæpretium erat demonstrare.*

Propositio XXXII. inutilis est.

PROPOSITIO XXXIII.

THEOREMA XXIII.

IN æqualibus circulis anguli, sive ad centrum, sive ad circumferentiam, quemadmodum etiam sectores, sunt inter se, ut arcus, qui iis subtenduntur.

Dico 1, angulos ad centrum BAC, EDF (*fig.* 5. *tab.* 5.) in circulis æqualibus BGCI, EHFK esse inter se, ut duos arcus BC, EF, qui ipsis subtenduntur.

PRÆ-

PRÆPARATIO.

Dividatur bifariam uterque angulus per radios AG, DH, qui arcus BC, EF pariter bifariam divident, non minus, quam duos ſectores ABCA, DEFD.

DEMONSTRATIO.

Quoniam (*per* 15. 5.) arcus BC eſt ad ſui dimidium BG, ut arcus EF eſt ad ſui dimidium EH; & ſimiliter angulus BAC eſt ad ſui dimidium BAG, ut angulus EDF eſt ad ſui dimidium EDH; proportio, quæ eſt inter quatuor arcus BC, BG, EF, EH, ſimilis eſt illi, quæ eſt inter quatuor angulos BAE, BAG, EDF, EDH. Igitur alternando (*per* 16. 5.) ſi duo crculi ſint æquales, proportio, quæ eſt inter quatuor arcus BC, EF, BG, EH ſimilis erit proportioni, quæ eſt inter quatuor angulos BAC, EDF, BAG, EDH; & proinde eadem erit ratio anguli BAC ad angulum EDF, ac arcus BC ad arcum EF; *quod primum erat oſtendendum*.

Dico 2, angulos ad circumferentiam I, & K eſſe inter ſe, ut arcus AC, EF, qui iis ſubtenduntur; quod quidem evidens eſt; quum enim ſint dimidia angulorum ad centrum (*per* 20. 3.) erunt in eadem ratione cum duobus angulis ſui duplis (*per* 15. 5.) Idem de duobus ſectoribus ABCA, DEFD demonſtrari poteſt. Nam quum duo circuli ſint æquales, poſſunt conſiderari, ut duo triangula ejuſdem altitudinis, quorum baſes ſunt arcus BC, FE proindeque erunt inter ſe, ut eorum baſes (*per* 1.) *quod oſtendendum ſupererat*.

1. *De ratione, quæ inter angulos, qui ad centrum circulorum ſunt, & arcus, qui iis ſubtenduntur, quique, ut alibi diximus, ſunt eorundem menſura, intercedit, nihil ulterius agit Euclides. Quum*

itaque ad intelligentiam eorum, quæ in Astronomia, in Optica, & alibi dicuntur a recentioribus Physico-mathematicis, aliqua Trigonometriæ notitia videatur necessaria, hinc de ea hoc in loco agere congruum duximus.

2. *Est igitur* Trigonometria, *ut ex ipso nomine constat:* certa ratio angulos & latera cujusquumq; trianguli, sive plani, sive sphærici metiendi, & ad calculum reducendi ope quarundam linearum, quæ vel *sinus*, vel *tangentes*, vel *secantes* dicuntur. *Hinc duæ sunt trigonometriæ partes; alia enim dicitur* trigonometria plana, *alia vero* sphærica. *De plana tantum verba faciemus, nam sphærica ad abstrusiorem Mathesim potius, quam ad Geometriæ elementa spectare videtur. A sinubus exordium capiemus.*

3. *Itaque sit semicirculus ADB* (fig. 6. tab. 5.) *cujus circumferentia est 180 graduum, ut alibi vidimus; quamobrem quadrans ACD erit 90 graduum. Dividatur itaque quadrans AD per cogitationem in suos 90 gradus; quilibet autem gradus in 60 minuta, quorum etiam minutorum quodlibet in 60 minuta secunda dividi potest; & sic deinceps in infinitum. Ponamus itaque singulos divisionis arcus AM, ME, EF &c. esse unius gradus; itaque si a centro C ad singula sectionis puncta ducantur singuli radii CM, CE, CF &c. anguli, qui in centro C constituentur, juxta hanc hypothesim, erunt singuli unius gradus, quoniam arcus unius gradus est singulorum mensura. Angulus itaque ACE superat angulum ACM uno duntaxat gradu; angulus ACF duobus, &c.*

4. *Si igitur a punctis M, E, F ducantur rectæ MN, EG, FH perpendiculares diametro AB, linea MN erit subtensa angulo unius gradus, linea EG angulo duorum graduum, linea FH angulo trium graduum, &c.*

5. *Unaquæque autem harum linearum, quæ angulis*

gulis in centro C positis subtenduntur, vocatur, tum eorum angulorum, tum arcuum, a quibus anguli continentur, sinus rectus. *Quare linea MN est sinus rectus tum anguli ACM, tum arcus AM; linea EG sinus rectus anguli ACE, & arcus AE; recta FH sinus rectus anguli ACF, & arcus AF, &c.*

6. *Quamobrem definiri potest sinus rectus alicujus arcus* semissis, *sive* dimidia pars chordæ, seu subtensæ duplo ipsius arcus. *Evidens enim est* (per 3. 3.) *rectam EK, quæ est sinus rectus arcus ED, esse dimidiam partem chordæ, seu subtensæ arcui EDS.*

7. *Ea diametri pars, quæ inter arcum, & sinum rectum jacet, vocatur* sinus versus; *quocirca sinus versus anguli ACM, vel arcus AM, est recta AN; sinus versus anguli ACE, sive arcus AE, recta AG, &c.*

8. *Recta ML, quæ est sinus rectus arcus MD, qui una cum arcu AM complet quadrantem AD, dicitur* sinus complementi *arcus AM, sive anguli ACM, quoniam est sinus rectus anguli MCD, qui una cum angulo ACM complet angulum rectum ACD. Eadem de caussa recta EK est sinus complementi arcus AE, &c.*

9 *Integer radius circuli dicitur* sinus totus, *quum in circulo nullus sit sinus radio circuli major. Quare hypotenusa cujuslibet trianguli rectanguli est sinus totus anguli recti. Manifestum est igitur, hypotenusam CM trianguli rectanguli CMN, quæ æqualis est rectæ CD, quæ est sinus quadrantis AD, esse sinum totum anguli recti CNM; idipsum dic de hypotenusa CE &c.*

10. *Si arcus sit quadrante major, ejus sinus rectus idem erit, ac sinus rectus reliqui arcus, cum quo semicirculum complet. Hinc sinus rectus arcus quadrante majoris FDB est FH sinus rectus reliqui arcus AF, cum quo semicirculum ADB complet. Hinc*

 eti-

etiam EG, qui est sinus rectus arcus AE, est pariter sinus rectus tum arcus EDB, tum anguli ECB, &c. atque hæc quod spectat ad sinus.

11. *Ad* tangentes, *&* secantes *quod attinet, earum explicationem breviter absolvemus. Sit idem semicirculus ADB cujus quadrans BD in suos* 90 *gradus divisus sit eo, quo superius diximus, modo. Ab extremo autem B diametri AB ducatur tangens BQ indefinita, ad quam per singula sectionis puncta T, S, R a centro C ducantur rectæ CO, CP, CQ, quæ in centro C angulos constituent BCO, BCP, BCQ &c. quibus totidem arcus subtenduntur BT, BS, BR. Recta igitur BO erit* tangens *arcus BT, sive anguli BCT unius gradus; linea BP* tangens *arcus BS, seu anguli BCS duorum graduum, &c. Vicissim recta CO erit* secans *arcus BT, & anguli BCT unius gradus; recta CP* secans *arcus BS, vel anguli BCS duorum graduum, & sic de ceteris.*

12. *Quemadmodum autem de sinu recto dictum est, arcus quadrante major, v.g. AS, eandem habet tangentem BP, & secantem CP, ac arcus BS, qui cum eo semicirculum complet. Quare in omni triangulo rectangulo, ut BCP, tangens anguli acuti P est recta CB, alterius vero BCP recta BP; hypotenusa autem CP est utriusque acuti anguli secans. Si enim a puncto P, intervallo vero PB, describatur circulus, apparebit, BC esse rectam circulum tangentem; quæ, quoniam a secante CP intercipitur, erit etiam tangens anguli CPB.*

13. *His prænotatis, quo pacto tum sinus, tum tangentes, tum secantes ad certum calculum reducantur, explicandum est. Sit igitur sinus totus anguli BAC* 30 *graduum radius AB* (fig. 7. tab. 5.) *ut dictum est n.9. tangens vero recta CB, secans autem arcum BF* 30 *graduum recta AC, sinus denique rectus ejusdem arcus BF, & anguli FAB recta FE. His positis,*

ma-

manifestum est, tangentem BC esse dimidium secantis AC. Si enim ducatur alia secans 30 graduum AD, hæc occurrens tangenti CB productæ in D triangulum æquilaterum ACD constituet, ob tres angulos D, C, & CAD, qui singuli sunt 60 graduum. Atque adeo tangens CB, quæ est dimidium CD, erit pariter dimidium secantis CA. Quare etiam sinus rectus EF erit dimidium sinus totius AF, vel AB (per 4.)

14. *Si igitur in triangulo rectangulo AEF hypotenusa AF ponatur esse 6, latus FE erit 3. Quod si demas a quadrato 36 hypotenusæ AF quadratum 9 lateris EF, remanebit 27 pro quadrato lateris AE* (per 47. 1.) *Quod si loco 6, & 3, sumatur 1000, 000 pro latere AF, &* 500, 000 *pro latere EF, quadratum EF erit* 250,000, 000,000, *quadratum vero AF* 1000, 000, 000, 000; *proindeque si a quadrato AF auferas quadratum EF, remanebit* 750, 000, 000, 000 *pro quadrato lateris AE, cujus radix quadrata, quæ est circiter* 866,025, *erit valor lateris AE, vel FO, qui est sinus rectus arcus FI.*

15. *Hinc colligitur, quo pacto, cognito sinu recto cujusquumque anguli, cognosci possit sinus complementi ejusdem anguli. Siquidem cognito valore sinus recti EF anguli BAF, cognoscitur valor sinus AE, vel FO, qui est sinus complementi ejusdem anguli BAF, ut dictum est n. 8. Etenim si ponamus, angulum BAF esse 30 graduum, angulus FAI, qui est ejus complementum ad angulum rectum, erit 60 graduum. Cum igitur sinus complementi anguli BAF sit FO, qui est æqualis AE, si a quadrato sinus totius AF, quod est æquale duobus quadratis EF, EA, auferatur quadratum sinus recti EF, quod superest, erit quadratum sinus complementi FO, cujus radix quadrata ejusdem sinus complementi valorem dabit.*

16. *Item cognito sinu recto alicujus anguli, ut sinu EF anguli BAF, & sinu complementi FO, vel AE,*

tum

tum secans AC, tum tangens CB ejusdem anguli facili negotio cognosci potest. Etenim quum duo triangula AEF, ABC, sint æquiangula, eadem erit ratio AE ad EF, ac AB ad BC (per 4.) *& insuper eadem erit ratio AE ad AF, ac AB ad AC; unde quum AF æqualis sit AB, erunt* ∺ *AE, AF, AC. Cognita igitur ratione AE ad AF, seu AB, eo modo, quo n.* 14. *ostensum est, ratio AF ad AC facile dignosci poterit per regulam proportionis; itaque si AE sit* 866,025, *& AF* 1000,000, *ut posuimus n.* 14. *AC erit circiter* 1154, 702, *CB vero* 577, 351; *nam* ∺ 866,025: 1000, 000: 1154, 702 *& insuper*: 866, 025: 500,000 : : 1000, 000: 577, 351.

17. *Cognito tum sinu, tum tangente, tum secante alicujus arcus, seu anguli, ut anguli BAC* 30 *graduum, sinus, tangens, & secans dimidii ejusdem arcus facile inveniri poterit. Diviso enim bifariam angulo BAC per rectam AK, erit* (per 3.) *AC, AB : : CK, BK ; & componendo, AC*+AB, *AB : : CK*+BK, *BK; seu* BC, *BK. Ex quo facile est concludere, tangentem* BK *esse* 267, 949. *Et quoniam duo quadrata AB*, BK *æqualia sunt quadrato AK* (per 47.1.) *quadratum AK erit* 1071, 796, 666, 601, *cujus radix* 1035, 274 *erit secans AK anguli* BAK 15 *graduum. Insuper quoniam secans est ad tangentem, ut sinus totus ad sinum rectum, cognita secante, & tangente anguli* 15 *graduum, facile invenietur, addito sinu toto, sinus rectus ejusdem anguli, & per sinum rectum sinus complementi eo modo, quo n.* 15 *explicatum est. Et hæc quidem quantum ad calculum sinuum, tangentium, & secantium.*

18. *Sinus rectus anguli* 45 *graduum æqualis est sinui complementi ejusdem anguli; arcus enim* 45 *graduum, quum sit dimidium quadrantis circuli, æqualis est complemento ejusdem arcus ad quadrantem. Si igitur dividatur bifariam angulus rectus* BCD (fig.6. tab.5.) *per rectam CP hæc erit secans anguli* 45 *graduum, quæ etiam dabit tangentem BP ejusdem tum anguli, tum arcus*

cus. Diviso item bifariam arcu B S per rectam CO, secans, tangens, & sinus anguli 22 graduum, & 30 minutorum ivenientur, & sic in infinitum.

19. *Ut inveniatur autem sinus anguli 36 graduum, inscribatur circulo pentagonum regulare, cujus latus, quum sit chorda, seu subtensa arcui 72 graduum, ejus dimidium erit sinus tum arcus, tum anguli 36 graduum; quo cognito, tum secans, tum tangens ejusdem arcus cognoscentur. Item ut inveniatur sinus 12 graduum, inscribi debet circulo pentedecagonum regulare, cujus latus bifariam divisum dabit sinum, qui inquiritur. Quod si arcus 12 graduum bifariam dividatur, invenietur sinus arcus 6 graduum; quo arcu item bifariam diviso, habebitur sinus 3 graduum & sic in infinitum.*

20. *Horum autem omnium sinuum valor cognoscetur adhibita proportionis regula eo modo, quo n. 17 exposuimus, agendo de sinu anguli 15 graduum; cujus regulæ ope tabulæ sinuum tangentium, & secantium construi possunt, adhibitis logarithmis, seu numeris exponentibus, quorum usus in trigonometria præcipue maximus est. Hæ autem tabulæ a diligentissimis Geometris accuratissime constructæ reperiuntur, ut monuimus ad definitionem VIII libri V, ubi de logarithmis. Harum tabularum ope angulorum cujuslibet trianguli valor inquiritur, non secus, ac laterum. Etenim in quolibet triangulo latera sunt inter se, ut sinus angulorum, quibus subtenduntur, quod sic ostendi potest.*

21. *Sit triangulum ABC* (fig. 11. tab. 4.) *circulo inscriptum; si a centro F ducantur perpendiculares FD, FE, hæ duo latera AB, AC bifariam divident* (per 3.3.) *proindeque AB erit ad AC, ut AD ad AE* (per 15. 5.) *Atqui AD est sinus anguli AFD, sive ACB ipsi æqualis* (per 20. 3.) *& similiter AE est sinus anguli AFE, seu ABC item ipsi æqualis; ergo duo latera AB, AC trianguli ABC sunt inter se, ut sinus angulorum C, & B, quibus subtenduntur, quod ostendendum susceperamus.*

21.

22. *Ex hac propositione, veluti ex quodam generali principio, cujuslibet trianguli laterum, & angulorum mensura deducitur. Si enim in triangulo* ABC, *cujus duo latera* AB, AC, *una cum angulo* C, *cognita sunt, reliquum latus* CB *una cum reliquis angulis* A, & B, *cognoscere oporteat, fiat ut latus* AB *cognitum ad sinum anguli* C *item cogniti, ita latus* AC *ad quartum terminum proportionalem, qui erit sinus anguli* B, *quo cognito etiam tertius angulus* A *cognitus erit* (per 32.1.) *Quare si fiat, ut sinus anguli* C *cogniti ad latus* AB *cognitum, ita sinus anguli* A *item cogniti ad quartum terminum proportionalem, hic dabit valorem lateris* CB, *quod cognoscere oportebat.*

23. *Si vero unicum latus* AB, *una cum duobus angulis* C, & B, *cognitum sit, fiat, ut sinus anguli* C *ad latus* AB, *ita sinus anguli* B *item cogniti ad quartum terminum proportionalem, qui erit latus* AC *angulo* B *oppositum; & iterum, ut sinus anguli* B *ad latus* AC *jam cognitum, ita sinus anguli* A *cogniti* (per 32. 1.) *ad quartum terminum proportionalem, qui erit valor lateris* CB, *quod cognoscere oportebat.*

24. *Hæc porro omnia, quæ per regulam proportionis fieri postulant, ope logarithmorum minus operosa erunt; in tabulis namque sinuum tangentium, & secantium, non modo harum omnium linearum valor, sed logarithmi etiam, qui iisdem respondent, inveniuntur. Unde omissis multiplicationibus, & divisionibus, quæ non sine acri studio, & magna animi contentione fiunt, ut sinus, tangentes, & secantes pro triangulorum analysi inveniantur, sufficit logarithmos consulere, quorum ope per additionem, & subtractionem id perficitur, quod per multiplicationem, & divisionem sine logarithmis fieri oporteret. In harum autem linearum supputatione hic proportionis ordo tenendus est, nimirum:* Ut sinus complementi ad sinum totum, ita sinus totus ad secantem; & *insuper:* ut sinus totus ad sinum rectum, ita secans ad tan-

tangentem. *Vide, quæ diximus numeris* 15, 16, & 17.

25. *Geometricam angulos metiendi rationem hucusque exposuimus; at quum mechanica etiam methodus in praxi utilissima aliquibus videatur, quæ nimirum fit ope illius instrumenti, qui* circinus proportionis *vocatur, de eo nonnulla hic addere placet. Hic circinus crura habet ambo plana, in quibus plures lineæ diversimode sectæ conspiciuntur, appositis ad quodlibet divisionis punctum notis numericis, quæ notæ, non secus ac puncta divisionum, in utroque crure sibi adamussim respondent. Inter has lineas ea, quæ longo punctorum serie notata est, angulorum mensuræ inservit, quibus punctis cujuslibet arcus, per quos anguli metiuntur, gradus designantur.*

26. *Sit igitur angulus BAC*, (fig. 8. tab. 5.) *quem metiri oporteat. Ducatur a puncto A ad quodquumque intervallum arcus DE, & manente eadem circini communis apertura, aperiatur circinus proportionis ad intervallum radii AE, statuendo circini communis extrema in iis punctis, in quibus numerus* 60 *in utroque circini proportionis crure inscriptus est in lineis punctis notatis. Deinde sumatur longitudo chordæ arcus DE, qua super circinum proportionis per circinum communem translata, ibi quot gradus angulus BAC contineat, cognoscetur.*

27. *Cujus rei ratio est, quod radius AE est latus exagoni circulo inscripti* (per 15. 4.) *& proinde subtensa arcui* 60 *graduum; quare si chorda arcus DE major sit radio AE angulus A plures, quam* 60 *gradus continebit, & proinde ultra numerum* 60 *circino proportionis applicabitur; si autem minor sit, citra numerum* 60 *applicabitur, & angulus A minus, quam* 60 *gradus, continebit.*

28. *Ope circini proportionis circulus etiam in quasquumque partes secari potest. Si enim dividendus sit circulus* BGCI (fig. 5. tab. 5.) *in decem partes æquales, sumta per circinum communem longitudine radii AB,*

aperiatur circinus proportionis ad id intervallum, statuendo extrema circini communis ubi numerus 6 *in utroque circini proportionis crure notatus reperitur*. *Nam radius circuli est chorda, seu subtensa sextæ parti circuli. Deinde translatis circini communis extremis ad ea puncta in quibus numerus* 10 *inscriptus est*, *invenietur longitudo chordæ arcus BG*, *qui est decima pars*, *quæ inquirebatur*.

29. *Divisio etiam lineæ rectæ in quot libuerit partes æquales fit ope circini proportionis. Itaque si linea aliqua dividenda sit v. g. in quinque partes æquales*, *inveniatur primum numerus*, *qui numerum quinarium pluries ex æquo contineat*, *veluti* 50, *qui decies continet quinque*. *Sumta deinde longitudine lineæ dividendæ per circinum communem*, *aperiatur circinus proportionis ad ejusdem intervallum*, *statuendo extrema circini communis in punctis*, *in quibus numerus* 50 *in utroque crure inscriptus est in linea punctis notata*. *Deinde in eadem linea inquiratur numerus* 10, *in quo statutis circini communis extremis*, *ejus apertura quintam lineæ datæ partem dabit*.

30. *Sed ut ad triangulorum mensuram redeamus*, *ea*, *ut initio dictum est*, *maximi est usus in omni fere philosophia*, *præsertim autem in Astronomia*, & *in Optica*, *ut apud eos*, *qui de iis tractant*, *videre est*. *In Geographia etiam potissimum adhibetur ad metiendas locorum longitudines*, *altitudines*, *aut distantias*, *eas præsertim*, *ad quas accedere non licet*. *Si enim in excelso montis jugo E* (fig. 9. tab. 5.) *sit turris aliqua BE*; *quam e longinguo conspicimus*, *cujus altitudo*, & *distantia sit cognoscenda*: *sumatur semicirculus KMN alidada*, *seu dioptra AM instructus*, *quæ circa centrum A versetur*, *collocatoque semicirculo in A*, & *directa alidada in B*, *notetur angulus BAD*, *qui ab alidada AM*, *una cum horizonte AD*, *fit*. *Tum dirigatur in E*, *ut cognoscatur angulus EAD*. *Deinde transferatur instrumentum in C propius ad montem*, *notatoque spatio AC*, *dirigatur alida-*

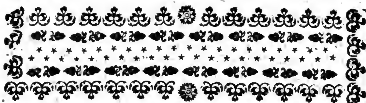
da-

dada, ut supra in B, & in E, ut notentur duo anguli BCA, ECA.

31. *Quoniam igitur in triangulo ABC duo anguli BAC, BCA, una cum latere AC, cogniti sunt, duo reliqua latera BA, BC, una cum angulo CBA facile cognoscentur; quare si angulus BAC sit 31 graduum, angulus vero ACB 136, reliquus angulus CBA erit 13 graduum* (per 32. 1.) *Ut autem duo latera AB, CB cognoscantur, ducatur in tabula linea quæcumque finita FH; deinde in puncto F fiat angulus GFH æqualis angulo BAC, & in puncto H angulus GHF æqualis angulo BCA per duas rectas GH, GF, quæ sibi occurrentes in G efficient angulum G æqualem angulo B.*

32. *Quoniam autem latus, seu longitudo AC cognita est, quæ v. g. est 10 passuum geometricorum, dividatur latus FH in decem partes æquales, quæ decem passibus spatii AC respondebunt. Linea igitur FH erit mensura duorum laterum GF, GH; adeoque quot partes lineæ FH continent duo latera FG, HG, tot passus geometricos duæ longitudines AB, CB continebunt. Quod si a puncto G ducatur GK perpendicularis lateri FH producti in K, quot partes lineæ FH continet perpendicularis GK, tot passus geometricos continebit altitudo BD; proindeque tum distantia, tum elevatio turris BE constabit. Ejus etiam altitudo BE cognoscetur, si in punctis F, & H fiant anguli IFH, IHF æquales angulis EAC, ECA; tunc enim cognita altitudine GI, etiam altitudo BE constabit. Hæc omnia fundantur in Prop. IV bujus Libri.*

Finis Libri Sexti.



LIBER SEPTIMUS.

EUCLIDIS UNDECIMUS.



Actenus de figuris planis egimus. Procedendum modo est ad solidorum naturam contemplandam, incipiendo a parallelepipedis, quorum cognitio reliquorum solidorum, quæ superficiebus curvis ambiuntur, cognitione longe facilior est. Septimum, octavum, nonum, & decimum Euclidis Libros relinquimus, tum quod eorum notitia parum, immo nihil fere ad universæ Geometriæ assequutionem necessaria sit, tum etiam quod hi Libri nullam, nec cum sex prioribus, nec cum undecimo, & duodecimo habeant connexionem.

DEFINITIONES.

I. CORpus, seu *solidum* est extensio in longum, latum, & profundum.

Quemadmodum autem initio Libri primi dictum est, lineam ex punctis constare, superficiem vero ex lineis, hic dicimus, solidum ex superficiebus componi; quare ut linea infinitis punctis, superficies infinitis lineis, ita solidum infinitis superficiebus una alteri superpositis constare dicendum est.

II.

II. *Extrema* solidi sunt superficies.

III. *Recta linea plano alicui perpendicularis* est, quum perpendicularis est omnibus lineis, a quibus in plano tangitur.

Hinc patet, lineam AB (fig. 10. tab. 5.) esse perpendicularem plano CDEF, si sit perpendicularis lineis GH, IK, LM, a quibus tangitur in puncto B.

IV. *Planum alteri plano perpendiculare* est, quum rectæ lineæ, quæ in altero planorum ad communem utriusque plani sectionem perpendiculariter ducuntur, alteri quoque plano sunt perpendiculares.

Planum igitur EFGH (fig. 11. tab. 5.) est perpendiculare plano ABCD, si linea IK, quæ perpendicularis est communi sectioni EH, sit etiam perpendicularis plano ABCD. Communis sectio duorum planorum *dicitur linea, secundum quam duo plana sese mutuo tangunt*; ut EH.

V. *Rectæ lineæ ad planum inclinatio* est acutus angulus, qui ab ea fit cum alia linea ducta a prioris extremo planum tangente, & occurrente alteri lineæ ab altero lineæ inclinatæ extremo ad idem planum perpendiculariter ductæ.

Angulus igitur ILK (fig. 11. tab. 5.) qui fit a linea IL, una cum linea KL occurrente perpendiculari IK ductæ ab altero extremo I lineæ IL, dicitur inclinatio ejusdem lineæ IL ad planum ABCD.

VI. *Plani ad planum inclinatio*, est acutus angulus, qui fit a duabus lineis in iisdem planis existentibus, & ad idem communis sectionis punctum perpendiculariter ductis.

Planum itaque EFGH (fig. 12. tab. 5.) inclinatum dicitur comparate ad planum ABCD, si angulus IKL, qui fit a duabus lineis KI, KL concurrentibus in punctum K, & communi sectioni EH perpendicularibus, sit acutus.

VII. *Planum ad planum similiter inclinatum* dici-

tur,

tur, atque alterum ad alterum, quando ambo inclinationum anguli sunt æquales.

Hæc definitio clara est, præcedente bene intellecta. Hinc colligi potest, illud planum magis esse alteri inclinatum, quam aliud, cujus angulus inclinationis minor est.

VIII. *Plana parallela* sunt, quæ æqualibus ubique intervallis a se distant.

IX. *Similes figuræ solidæ* sunt, quæ similibus planis, & numero æqualibus continentur.

X. *Similes, & æquales solidæ figuræ* sunt, quæ similibus planis, & numero, & magnitudine æqualibus, continentur.

XI. *Solidus angulus* est plurium planorum in idem punctum inclinatio.

Itaque angulus A (fig. 16. tab. 5.) *qui constituitur a tribus planis BAC, CAD, DAB in idem punctum A inclinatis, est angulus solidus.*

XII. *Prisma* est solidum, quod duobus planis similibus, æqualibus, & parallelis continetur, reliquis parallelogrammis.

Ex hac definitione colligi potest, nomine prismatis venire tum cubum, *tum* parallelepipedum, *quum utrumque bina plana habeat similia, æqualia, & parallela, reliqua vero parallelogramma. Siquidem* cubus *est solidum sex superficiebus quadratis constans, ut ABCD* (fig. 14. tab. 5.) Parallelepipedum *vero est solidum, quod sex item planis parallelogrammis continetur, quorum opposita sunt inter se parallela, & æqualia; ut ABCD* (fig. 15. tab. 5.) *ex quo patet, cubum omnem esse parallelepipedum, non vicissim; quemadmodum utrumque prisma vocari potest, esto non omne prisma parallelepipedum dici possit.*

Prisma porro communiter vocatur, quod duobus planis triangularibus, & parallelis comprehenditur, reliquis parallelogrammis; ut figura ABCDEF (fig. 13. tab. 5.

Quem-

Quemadmodum rectanguli area in plura quadrata dividi potest, quibus rectangulum metitur, ut monuimus in definitionibus Libri II, quæ quadrata, vel erunt pedes quadrati, vel sexpedæ, &c. ita solidum parallelepipedum rectangulum in plures cubos dividi potest, qui vel erunt pedes cubici, vel sexpedæ cubicæ. Quare si longitudo AB parallelepipedi AB-CD (fig. 15. tab. 5.) *ponatur esse 4 pedum, longitudo vero BC 2, pedum, altitudo denique CD 3 pedum, ipsum in 24 pedes cubicos dividetur. Nam si multiplices 4 per 2, productum 8 dabit basim AC, quæ multiplicata per altitudinem 3 dabit solidum 24. Idipsum dici potest de cubo; in quo tamen, quum longitudo, latitudo, & altitudo æquales sint, ex trium numerorum æqualium multiplicatione ejus soliditas innotescet. Hinc cubus ABCD* (fig. 14. tab. 5.) *in 64 pedes cubicos divisus intelligitur, cujus radix cubica est linea AB. 4 pedum.*

Reliquas Euclidis definitiones ad sequentem Librum remittimus, ad quem revera spectant.

PROPOSITIO I.

THEOREMA I.

Recta linea, quæ est in plano, si producatur erit in eodem plano.

Dico, lineam EF (*fig.* 17. *tab.* 5.) quæ est in plano ABCD, si producatur in H, in eodem plano futuram esse.

PRÆPARATIO.

Excitetur a puncto F in plano ABCD recta FG perpendicularis rectæ EF, & recta FH perpendiculari rectæ FG. DE-

DEMONSTRATIO.

Quoniam uterque angulus GFE, GFH rectus eſt (*per conſtr.*) duæ rectæ FH, FE erunt in directum conſtitutæ (*per* 14. 1.), & quoniam utraque eſt in plano ABCD (*per conſtr.*) ſequitur, lineam EF in directum productam, ſeu totam EH eſſe in eodem plano; *quod erat oſtendendum*.

PROPOSITIO II.

THEOREMA II.

OMne triangulum in uno eſt plano. Et duæ rectæ ſeſe mutuo ſecantes ſunt in eodem plano.

Dico, omnia latera trianguli AEC (*fig.* 18. *tab.* 5) eſſe in eodem plano; quod ſane evidens eſt; triangulum enim rectilineum nihil aliud eſt, quam planum triangulare. Ex quo patet etiam ſecunda pars propoſitionis, ſi enim duo latera AE, CE producantur in B, & D, erunt in eodem plano (*per* 1.) *quod erat oſtendendum.*

PROPOSITIO III.

THEOREMA III.

SI duo plana ſeſe mutuo ſecent, eorum communis ſectio erit recta linea.

Manifeſtum eſt, communem ſectionem duorum planorum ABCD, EFGH (*fig.* 11. *tab.* 5.) eſſe rectam lineam FH. Si enim per duo puncta E, H in communi ſectione duorum planorum ſumta duæ rectæ lineæ du-

ducantur, hæ simul convenient; siquidem duæ rectæ spatium concludere nequeunt, atque adeo unicam rectam EH constituent, quæ quum utrique plano proposito communis sit, eorum communis sectio erit; *Quod ostendendum susceperamus*.

PROPOSITIO IV.

THEOREMA IV.

SI recta linea duabus rectis sese mutuo intersecantibus ad rectos angulos insistat, etiam earum plano ad perpendiculum insistet.

Dico, rectam AB (*fig.* 10. *tab.* 5.) quæ est perpendicularis duabus rectis GH, IK sese intersecantibus in puncto B, etiam earum plano CDEF esse perpendicularem, proindeque etiam lineæ LM.

PRÆPARATIO.

Secentur bifariam duæ rectæ GH, IK, ita ut BG, BH, BI, BK sint æquales, junganturque rectæ IG, HK. Ducantur etiam a puncto A ad singula puncta I, L, G, K, M, H singulæ rectæ AI, AL, AG, AK, AM, AH.

DEMONSTRATIO.

Quoniam quatuor triangula rectangula ABG, ABH, ABI, ABK sunt æqualia (*per* 4. 1.) Etiam bases AG, AH, AI, AK erunt æquales; & ob eandem rationem duo triangula isoscelia BGI, BHK, quum sint æqualia (*per* 4. & 15. 1.) habebunt bases IG, HK æquales. Ex quo sequitur (*per* 26. 1.) duo triangula BGL, BHM esse æqualia, & proinde latus BL æqua-

le esse lateri BM, & latus GL lateri HM. Sequitur etiam (*per* 8. 1.) duo triangula AGI, AHK esse æqualia, & proinde angulum AGI æqualem esse angulo AHK; ex quo item infertur (*per* 4. 1.) duo triangula AGL, AHM esse æqualia, & proinde basim AL æqualem esse basi AM. Ex quibus tandem concluditur (*per* 8. 1.) duo triangula ABL, ABM esse inter se æqualia, atque adeo angulos LBA, MBA esse rectos (*per* 13. 1.) & rectam AB esse perpendicularem rectæ LM; *quod ostendendum erat*.

PROPOSITIO V.

THEOREMA V.

Si recta linea tribus rectis lineis in plano sese tangentibus ad rectos angulos insistat, hæ erunt omnes in eodem plano.

Dico, si recta AB (*fig.* 19. *tab.* 5.) tribus rectis BF, BD, BC sese tangentibus in puncto B ad rectos angulos insistat, hæ tres lineæ erunt omnes in eodem plano DGHI.

DEMONSTRATIO.

Si tres lineæ BC, BD, BF non sint omnes in eodem plano, altera earum, v. g. BF, erit in alio plano, puta in plano ABEK. Quoniam igitur linea AB est perpendicularis duabus lineis BD, BC (*ex hypoth.*) erit perpendicularis etiam communi sectioni BE, (*per* 4.) proindeque angulus ABE rectus erit; atqui etiam angulus ABF est rectus (*ex hyp.*) ergo duo anguli ABF, ABE sunt æquales; ex quo sequitur, lineam BF cum linea BE convenire debere, nec ultra rectam BE attolli; *quod demonstrandum susceperamus*.

PRO-

PROPOSITIO VI.

THEOREMA VI.

SI binæ rectæ eidem plano sint perpendiculares, erunt inter se parallelæ.

Dico, duas rectas AB, CD (*fig.* 20. *tab.* 5.) si sint perpendiculares eidem plano EFGH, esse inter se parallelas.

PRÆPARATIO.

Juncta recta BD, excitetur a puncto D in plano EFGH recta DI perpendicularis eidem BD, & æqualis rectæ AB; dein jungantur tres rectæ AD, AI, BI.

DEMONSTRATIO.

Manifestum est, duo triangula rectangula BDI, ABD esse æqualia (*per* 4. 1.) ob latus AB æquale lateri DI, (*per constr.*) & latus DB commune; quare etiam basis BI æqualis erit basi AD, & (*per* 8. 1.) duo triangula ABI, ADI erunt æqualia, & angulus ADI æqualis erit angulo ABI recto (*per def.* 3.) & proinde rectus. Recta igitur DI est perpendicularis tribus lineis DC, DA, DB, quæ idcirco erunt omnes in eodem plano (*per* 5.) Ex quo sequitur (*per* 2.) ob triangulum ABD, duas rectas AB, CD perpendiculares plano EFGH esse in eodem plano, atque ob duos angulos rectos CDB, ABD, esse parallelas (*per* 28. 1.) *quod erat ostendendum.*

COROLLARIUM.

Ex hac propositione sequitur, duas rectas parallelas esse in eodem plano.

PROPOSITIO VII.

THEOREMA VII.

INter duas parallelas ducta recta linea est in eodem plano.

Hæc propositio evidens est; ea enim spectari potest, ut corollarium præcedentis, ex qua aperte colligitur, rectam AD (*fig.* 20. *tab*: 5.) ductam inter duas parallelas AB, CD esse in eodem plano ABCD.

PROPOSITIO VIII.

THEOREMA VIII.

SI duarum parallelarum altera sit plano cuiquam perpendicularis, altera etiam erit eidem plano perpendicularis.

Dico, si duarum parallelarum AB, CD (*fig.*20. *tab.* 5.) altera AB sit perpendicularis plano EFGH, alteram etiam CD esse eidem plano perpendicularem.

PRÆPARATIO.

Juncta recta BD in plano EFGH, quæ erit perpendicularis rectæ AB (*per defin.* 3.) & alteri etiam CD (*per* 29. 1.) excitetur a puncto D recta DI perpendicularis eidem BD, & æqualis rectæ AB; denique jungantur rectæ AD, AI, BI.



DE-

DEMONSTRATIO.

Manifeſtum eſt, (*ut in* 6.) duo triangula ABD, BDI eſſe æqualia, non minus ac duo ADI, ABI; quare ob angulum rectum ABI (*per def.* 3.) angulus ADI ipſi æqualis rectus erit: adeoque linea DI erit perpendicularis duabus DA, DB, & proinde etiam lineæ CD, quæ eſt in earum plano (*per* 6) Quum igitur recta CD ſit perpendicularis duabus rectis DB, DI, erit etiam perpendicularis (*per* 4.) earum plano EFGH; *quod erat demonſtrandum*.

PROPOSITIO IX:

THEOREMA IX.

Quæ eidem rectæ in alio plano exiſtenti ſunt parallelæ, ſunt inter ſe parallelæ.

Dico, ſi duæ rectæ AE, CD (*fig.* 13. *tab.* 5.) ſint parallelæ rectæ BF in alio plano exiſtenti, eas eſſe inter ſe parallelas.

PRÆPARATIO.

Ducatur per punctum G ad libitum ſumtum in linea BF in plano duarum parallelarum BF, CD recta GH perpendicularis rectæ CD, quæ etiam ipſi BF perpendicularis erit (*per* 29. 1.) Itemque in plano duarum BF, AE per idem punctum G ducatur recta GI perpendicularis rectæ AE, quæ pariter eidem BF erit perpendicularis.



DE-

DEMONSTRATIO.

Quoniam linea BG eſt perpendicularis utrique lineæ GH, GI (*per conſtr.*) erit (*per* 4.) etiam eorum plano GHI perpendicularis; quamobrem (*per* 8) duæ rectæ AE, CD, quæ ſunt parallelæ eidem rectæ BG (*ex hyp.*) erunt perpendiculares eidem plano GHI; & proinde inter ſe parallelæ (*per* 6.) *quod oſtendendum ſuſceperamus*.

PROPOSITIO X.

THEOREMA X.

SI duæ rectæ lineæ ſeſe tangentes duabus rectis lineis ſeſe item tangentibus, non quidem in eodem plano, ſint parallelæ, æquales angulos continebunt.

Dico, ſi duæ rectæ AB, BC (*fig.* 13. *tab.* 5.) ſeſe tangentes in puncto B ſint parallelæ duabus lineis EF, FD ſeſe contingentibus in puncto F, & in alio plano conſtitutis, angulum ABC æqualem futurum angulo EFD.

PRÆPARATIO.

Fiat linea EF æqualis rectæ AB, & linea FD lineæ BC, junganturque rectæ AC, ED, AE, CD, BF.

DEMONSTRATIO.

Quoniam duæ rectæ AB, EF ſunt parallelæ (*ex hyp.*) & æquales (*per conſtr.*) reliquæ duæ AE, BF erunt æquales, & parallelæ (*per* 33. 1.) & ob eandem rationem duæ BF, CD erunt item parallelæ, &

æqua-

æquales, proindeque duæ AE, CD erunt æquales (*per axi.9.1.*) & parallelæ (*per 9.*) & (*per 33. 1.*) duæ AC, ED erunt æquales, & parallelæ. Ex quo ſequitur, duo triangula ABC, DFE eſſe æquiangula (*per 8. 1.*) *quod erat oſtendendum*.

PROPOSITIO XI.

PROBLEMA I.

A Dato extra planum puncto ad ipſum planum perpendicularem lineam ducere.

Ut a dato puncto E (*fig. 21. tab. 5.*) extra planum ABCD ducatur recta eidem perpendicularis, ducatur in dato plano ABCD quæquumque recta FH, ad quam a dato puncto E ducatur (*per 12. 1.*) perpendicularis EG. Ducatur etiam a puncto G (*per 11. 1.*) in eodem plano ABCD recta GI perpendicularis rectæ FH; denique (*per 12. 1.*) a puncto E ducatur ad rectam GI perpendicularis EI, quæ erit etiam plano ABCD perpendicularis.

DEMONSTRATIO.

Quoniam recta FG perpendicularis eſt duabus rectis GE, GI (*per conſtr.*) erit etiam perpendicularis earum plano EGI (*per 4.*) Quare ſi per punctum I ducatur recta IK parallela rectæ FG, hæc erit (*per 8.*) eidem plano EGI perpendicularis; proindeque lineæ EI (*per def. 3.*) Quoniam igitur recta EI eſt perpendicularis duabus rectis IG, IK, erit (*per 4.*) etiam earum plano ABCD perpendicularis; *quod facere, & demonſtrare oportebat.*

PRO-

PROPOSITIO XII.

PROBLEMA II.

A Dato puncto dati plani rectam ipsi plano perpendicularem excitare.

Sit datum punctum B (*fig.* 20. *tab.* 5.) in plano EFGH: ut ab eo excitetur recta eidem plano perpendicularis, ducatur (*per* 11.) a puncto C extra planum recta CD eidem plano perpendicularis, & a puncto B (*per* 30. 1.) recta BA parallela ipsi CD, quæ (*per* 8.) erit eidem plano EFGH perpendicularis; *quod facere, & demonstrare oportebat.*

PROPOSITIO XIII.

THEOREMA XI.

A Dato puncto in aliquo plano nequeunt duci ad easdem partes duæ rectæ eidem plano perpendiculares.

Hæc propositio evidens est; nam si possent duci duæ rectæ eidem plano perpendiculares, hæ essent parallelæ (*per* 6.) quare quum ab eodem puncto prodeant, necessario una coibunt.

COROLLARIUM.

Hinc deduci potest; quod Propositione XXXVIII ostendit Euclides, nimirum, si duo plana ABCD, EFGH (*fig.* 11. *tab.* 5.) sint sibi mutuo perpendicularia, rectam IK, quæ in plano EFGH perpendiculariter ducitur ad planum ABCD, incidere in communem sectionem EH.

PRO-

PROPOSITIO XIV.

THEOREMA XII.

SI recta linea duobus planis sit perpendicularis, hæc duo plana erunt parallela.

Dico si recta AB (*fig.* 22. *tab.* 5.) sit perpendicularis duobus planis AKEM, BLDC, hæc duo plana esse inter se parallela.

DEMONSTRATIO.

Quoniam recta AB est perpendicularis plano BLDC, erit perpendicularis rectæ BC (*per def.* 3.) & ob eandem rationem erit perpendicularis etiam rectæ AM; quare quatuor anguli figuræ ABCM erunt recti, & proinde ea erit parallelogrammum. Ex quo efficitur, duas rectas AB, CM esse æquales (*per* 34. 1.) Idipsum eodem modo ostendi potest de duabus rectis AB, KL. Ex quo infertur, duo plana AKEM, BCDL esse æquidistantia; *quod demonstrare oportebat*.

SCHOLION.

Conversa hujus propositionis æque vera est, & eadem ratione ostenditur.

Per hanc propositionem ostendi potest, omnes sphæræ circulos, qui eosdem polos habent, quemadmodum Æquator, duo Tropici, & duo Polares in Sphæra armillari, esse parallelos; quoniam eorum axis communis eorundem circulorum planis est perpendicularis.

PROPOSITIO XV.

THEOREMA XIII.

SI duæ rectæ lineæ ſeſe tangentes in uno plano ſint parallelæ duabus rectis ſeſe tangentibus in alio plano, hæc erunt inter ſe parallela.

Dico, ſi duæ rectæ AB, BC (*fig.* 13. *tab.* 5.) ſint parallelæ duabus rectis EF, FD in alio plano exiſtentibus, duo plana ABC, EFD eſſe parallela. Id quod ſane evidens eſt. Nam ſi ducatur recta BF perpendicularis duabus rectis AB, BC, hæc erit etiam perpendiculari duabus FE, FD (*per* 29. 1.) & proinde (*per* 4.) erit earum planis perpendicularis, & (*per* 14.) hæc duo plana erunt parallela; *quod erat oſtendendum*.

PROPOSITIO XVI.

THEOREMA XIV.

COmmunes ſectiones unius plani cum duobus planis parallelis ſunt inter ſe parallelæ.

Evidens eſt, communes ſectiones AM, BC (*fig.* 22. *tab.* 5.) plani ABCM cum duobus planis AMEK, BCDL eſſe parallelas; cum enim ambæ ſint in ipſis planis, quæ ſunt parallela (*ex hyp.*) fieri nequit ut ſupra ea attollantur (*per* 1.) proindeque nuſquam ſibi occurrere poſſunt.



PRO-

PROPOSITIO XVII.

THEOREMA XV.

SI duæ rectæ a parallelis secentur planis, in easdem proportiones secabuntur.

Dico, si duæ rectæ AB, KL (*fig.* 22. *tab.* 5.) a tribus planis parallelis AE, HI, BD secentur, earundem esse rationem duarum partium AH, HB, ac duarum KF, FL.

DEMONSTRATIO.

Ducta recta AL, quæ occurret plano HI in puncto O, manifestum est, duas communes sectiones HO, BL plani triangularis ABL cum duobus planis parallelis HI, BD esse parallelas (*per* 16); quare (*per* 2. 6.) erit AH, HB :: AO, OL; Et eadem de caussa erit item KF, FL :: AO, OL; & (*per* 11. 5.) AH, HB :: KF, FL; *quod erat ostendendum*.

PROPOSITIO XVIII.

THEOREMA XVI.

SI recta plano cuipiam sit ad rectos angulos; omnia, quæ per ipsam transeunt, plana erunt eidem plano ad angulos rectos.

Dico, si recta IK (*fig.* 11. *tab.* 5.) sit perpendicularis plano ABCD, in quoquumque plano ea reperiatur, v. g. in plano EFGH, cujus communis sectio est recta EH, hoc esse eidem plano ABCD perpendiculare.

DEMONSTRATIO.

Ducta in plano EFGH linea quaquumque GH, quæ communi sectioni EH sit ad rectos angulos, eadem erit (*per* 29. 1.) lineæ IK parallela; Atqui recta IK est perpendicularis plano ABCD (*ex hyp.*) ergo (*per* 8.) etiam GH eidem plano perpendicularis erit, & (*per def.* 4.) planum EFGH erit perpendiculare plano ABCD; *quod operæpretium erat demonstrare.*

PROPOSITIO XIX.

THEOREMA XVII.

Si duo plana sese mutuo intersecantia alicui plano sint perpendicularia, eorum communis sectio erit eidem plano perpendicularis.

Dico, rectam HM (*fig.* 23. *tab.* 5.) quæ est communis sectio duorum planorum ABCD, EFGH perpendicularium plano IKLP, esse perpendicularem eidem plano IKLP.

PRÆPARATIO.

Excitetur a puncto H in plano ABCD recta HN perpendicularis communi sectioni DC; & in plano EFGH recta HO perpendicularis communi sectioni GH.

DEMONSTRATIO.

Quoniam duæ lineæ HN, HO sunt perpendiculares duabus communibus sectionibus DH, GH, duorum planorum ABCD, EF GH cum plano IKLP (*per constr.*) erunt perpendiculares eidem plano IKLP (*per* def.

def. 4.) proindeque (*per* 13.) simul convenient cum linea HM, quæ idcirco erit plano IKLP perpendicularis; *quod operæpretium erat demonstrare*.

PROPOSITIO XX.

THEOREMA XVIII.

SI solidus angulus tribus angulis planis contineatur, duo anguli quiquumque simul sumti tertio majores erunt:

Dico, in angulo solido A (*fig.* 16. *tab.* 5.) qui constat tribus angulis planis BAC, CAD, DAB, binos angulos quosqunmque, v. g. BAD, CAD, esse simul majores tertio BAC, quem ponimus esse ceteris duobus seorsum sumtis majorem.

PRÆPARATIO.

Quoniam posuimus angulum BAC omnium maximum esse in angulo solido A, licet ab eo secare angulum BAE æqualem angulo BAD per rectam AE, quæ sit æqualis rectæ AD. Hoc posito, jungantur rectæ lineæ BC, CD, DB.

DEMONSTRATIO.

Quoniam angulus BAE æqualis est angulo BAD, & latus AE lateri AD, latus vero AB communis, duo triangula BAE, BAD erunt æqualia (*per* 4. 1.) & basis BD æqualis erit basi BE. Et quoniam duo latera DB, DC trianguli plani BCD sunt majora tertio CB *per* 20. 1.) sublatis æqualibus lineis BD, BE, remanebit recta CD major recta CE; atque adeo angulus CAD major erit angulo CAE. (*per* 25. 1.) ergo si duobus angu-

angulis inæqualibus CAD, CAE addantur duo anguli æquales BAE, BAD, alter alteri, manifestum erit, summam BAD + CAD majorem esse summa BAE + CAE; *quod ostendendum fuerat*.

PROPOSITIO XXI.

THEOREMA XIX.

OMnis solidus angulus angulis planis minoribus, quam quatuor rectis, constat.

Dico, summam trium angulorum BAC, CAD, DAB (*fig.* 16. *tab.* 5.) quibus constat angulus solidus A, minorem esse summa quatuor angulorum rectorum.

DEMONSTRATIO.

Si tres anguli plani BAC, CAD, DAB essent in plano BCD, essent simul æquales quatuor rectis, quoniam integra circuli circumferentia a centro A descripti esset eorum mensura. At quoniam hi tres anguli elevati sunt supra planum BCD, necesse est, eorum latera AB, AC, AD longiora esse, & proinde (*per* 21. 1.) angulos efficere minores quatuor rectis; *quod erat ostendendum*.

Propositiones XXII, & XXIII sunt inutiles.



PRO-

PROPOSITIO XXIV.

THEOREMA XXI.

SI solidum quatuor parallelis planis contineatur, opposita ipsius plana, & similia, & æqualia erunt.

Dico, si solidum ABCD (*fig. 22. tab. 5.*) quatuor planis oppositis AMEK, BCDL, ABCM, DEKL parallelis constet, oppositas superficies esse similes, & æquales. Vocetur autem hujusmi solidum *Parallelepipedum*.

DEMONSTRATIO.

Quoniam plana AMEK, BCDL sunt parallela (*ex hyp.*) & per planum ABCM secantur, communes sectiones AM, BC erunt parallelæ (*per* 16.) Similiter, quoniam duo plana ABCM, DEKL sunt parallela, atque a plano CDEM secantur, communes sectiones CM, DE erunt parallelæ. Eodem modo ostendi potest, communes sectiones AB, KL, non secus ac duas ME, CD, & AK, BL, esse parallelas; ex quo infertur, singula plana solidi ABCD esse parallelogramma, quorum opposita omnia bina, & bina, erunt æquiangula (*per* 10.) & insuper æqualia (*per* 34. 1.) *quod erat ostendendum*.



PRO-

PROPOSITIO XXV.

THEOREMA XXII.

SI solidum parallelepipedum plano secetur oppositis planis parallelo, duo solida, quæ inde consurgent, erunt inter se, ut eorum bases.

Dico, si solidum AD (*fig.* 22. *tab.* 5.) secetur plano HI parallelo duobus planis oppositis AE, BD, solidum AI esse ad solidum HD, ut basis AF ad basim HL.

DEMONSTRATIO.

Si per singula puncta lineæ AM, quæ est altitudo communis duorum solidorum AI, HD, quæ sunt duo parallelepipeda (*per* 24.) ducantur per cogitationem totidem plana basibus AF, HL parallela, hæc erunt in utroque parallelepipedo, & numero æqualia, & basibus similia; nempe parallelogramma æqualia basibus AF, HL (*per* 24. Itaque unumquodque planum parallelepipedi AI erit ad unumquodque planum parallepipedi HD, ut basis AF est ad basim HL; & proinde (*per* 24. 5.) omnia plana simul sumta parallelepipedi AI, erunt ad omnia plana parallelepipedi HD, seu ad parallepipedum HD, ut basis AF, ad basim HL; *quod erat ostendendum.*

COROLLARIUM.

Hinc colligere licet, omnia parallelepipeda ejusdem altitudinis esse inter se, sicut eorum bases. Quare si duo parallelepipeda eandem habeant basim, & altitudinem, erunt inter se æqualia.

Per hanc demonstrationem, quæ per methodum,

quæ indivisibilium dicitur, facta est, facilis est constructio parallelepipedi rectanguli æqualis dato parallelepipedo obliquangulo. Si enim ab omnibus angulis basis parallelepipedi obliquanguli excitentur rectæ lineæ eidem basi perpendiculares ad eandem altitudinem dati parallelepipedi, hæ constituent parallelepipedum rectangulum dato parallelepipedo æquale. Etenim si per singula altitudinis utriusque parallelepipedi puncta ducantur totidem plana, hæc omnia erunt basi communi æqualia, & in utroque parallelepipedo itidem numero æqualia, ut patet. Hac de caussa, ubi de parallelepipedis in posterum agemus, ea semper ponemus, claritatis gratia, esse rectangula; nam obliquangula hac methodo facile in rectangula reduci possunt.

Propositiones XXVI, & XXVII, sunt nullius usus.

PROPOSITIO XXVIII.

THEOREMA XXIII.

SI solidum parallelepipedum secetur plano ducto per diagonales oppositorum planorum, in duo prismata æqualia secabitur.

Dico, si solidum AD (*fig.* 22. *tab.* 5.) secetur plano ALDM ducto per diagonales AL, MD duorum planorum oppositorum CE, BK, illud sectum iri in duo prismata æqualia.

DEMONSTRATIO.

Si per singula lineæ AM puncta, quæ est altitudo solidi AD, ducantur totidem plana basi AL parallela, universa hæc plana divident solidum AD in toti-

dem parallelogramma basi AL similia, & æqualia (*per* 24.) quæ omnia per planum AMDL bifariam dividentur, non minus, quam basis BK (*per* 34. 1.) Ex quo infertur, duo prismata triangularia BCDLMA, AMEKLD esse æqualia; utrumque enim planis, & numero, & magnitudine æqualibus constat; *quod erat ostendendum*.

Propositio XXIX superflua est, quum in duabus sequentibus, ex quibus unicam facimus, comprehendatur.

PROPOSITIO XXX, & XXXI.

THEOREMA XXV, & XXVI.

PAralleiepipeda ejusdem altitudinis, quæ eandem habent basim, vel bases æquales, sunt inter se æqualia.

Hæc propositio est corollarium propositionis XXV; quum enim parallelepipeda ejusdem altitudinis sint inter se, sicut eorum bases, si bases sint æquales, ea quoque erunt æqualia; *quod demostrandum susceperamus*.

COROLLARIUM.

Prismata ejusdem basis, & ejusdem altitudinis sunt inter se æqualia; quum enim sint dimidia parallelepipedorum ejusdem basis, & ejusdem altitudinis (*per* 28.) sunt cum ipsis in eadem ratione (*per* 15. 5.) Quocirca quidquid de parallelepipedis imposterum dicetur, id de prismatis etiam dicendum esse constat.

Propositio XXXII Euclidis est corollarium propositionis XXV; quare, ejus loco, hanc aliam, quæ ei similis est, apponemus.

PRO-

PROPOSITIO XXXII.

THEOREMA XXVII.

PArallelepipeda eandem basim, aut æquales bases habentia, sunt inter se, sicut eorum altitudines.

Dico, duo parallelepipeda DF, OM (*fig.* 1. *tab.* 6.) quæ habent basim communem COEF, esse inter se, ut eorum altitudines OD, ON.

DEMONSTRATIO.

Si basis OF utriusque solidi vocetur *ab*, altitudo vero OD parallelepipedi DF *c*, & altitudo ON parallelepipedi OM *d*, jam habebitur *abc*, pro parallelepipedo DF, *abd* vero, pro parallelepipedo OM; manifestum est autem (*per* 15. 5.) esse *abc*, *abd* : : *c*, *d*; *quod erat ostendendum*.

Hic pariter, quod de parallelepipedis dictum est, de prismatis etiam est intelligendum.

PROPOSITIO XXXIII.

THEOREMA XXVIII.

SOlida parallelepipeda similia sunt in ratione triplicata rationis suorum laterum homologorum.

Dico, si duo solida AB, DF (*fig.* 1. *tab.* 5.) sint similia, adeo ut singula unius plana singulis alterius planis similia sint, & æquiangula, ita ut in rectam lineam constitui possint, ea esse in ratione triplicata rationis suorum laterum homologorum, puta AC, CF.

 Quam-

Quamobrem si hisce duabus lineis tertia, & quarta proportionalis inveniatur, ratio solidi AB ad solidum DF aequalis erit rationi lineae AC ad quartam proportionalem, ut constat est iis, quae diximus ad definitionem X Libri V.

DEMONSTRATIO.

Si describantur duo parallelepipeda CG, OM; id quod fit producendo latera utriusque parallelepipedi AB, DF quatenus sibi occurrant, manifestum erit (*per* 32.) solidum AB esse ad solidum CG ejusdem basis CE, ut altitudo CA est ad altitudinem CF; item solidum CG esse ad solidum OM ejusdem basis CM, ut altitudo CH est ad altitudinem CO; solidum denique OM esse ad solidum DF ejusdem basis OF, ut altitudo ON est ad altitudinem OD. Quum igitur tres rationes AC ad CF; CH ad CO; ON, seu CL ad OD sint similes (*ex hyp.*) posuimus enim solida parallelepipeda esse similia, evidens est, rationem solidi AB ad solidum DF, quae est composita ex hisce tribus rationibus similibus, esse triplicatam (*per def.* 10. 5.) rationis lateris AC ad latus CF; *quod erat ostendendum*.

COROLLARIUM I.

Parallelepipeda similia sunt inter se, ut cubi suorum laterum homologorum; quandoquidem cubi sunt totidem parallelepipeda similia.

COROLLARIUM II.

Datis quatuor lineis continue proportionalibus, parallelepipedum, quod fit sub prima, est ad parallelepipedum simile, quod fit sub secunda, ut prima est ad quartam.

COROLLARIUM III.

Prifmata triangularia fimilia funt in ratione triplicata fuorum laterum homologorum, funt enim dimidia fimilium parallelepipedorum ejufdem bafis, & altitudinis; proindeque funt in eadem ratione, ac ipfa parallelepipeda (*per* 15. 5.) Idipfum dici poteft de prifmatis polygonis, quorum nimirum plana parallela oppofita, vel pentagona funt, vel exagona, &c. Siquidem bafes polygonæ fimiles in totidem triangula fimilia dividi poffunt (*per* 20. 6.) & proinde ipfa etiam prifmata polygona in totidem prifmata triangula, ductis per fingulas bafis fectiones planis bafi perpendicularibus, fecari poterunt.

Vfus hujus propofitionis maximus eft, ubi de augendis, vel minuendis folidis fimilibus agitur. Si enim quis velit cubum octuplum alterius dati, duplicare debet hujus latus, & fiet latus cubi octupli alterius. Nam ratio triplicata rationis 1 *ad* 2 *eft ratio* 1 *ad* 8. *Quod fiquis vellet cubum duplum alterius, invenienda effent duæ mediæ continue proportionales inter latus cubi dati, & ejufdem lateris duplum, quarum prior effet latus cubi, qui inquiritur, ut ex corollario fecundo colligi poteft. Verum quum hæ duæ mediæ proportionales geometrica methodo inveniri hactenus minime potuerint, idcirco problema hoc, quod eft de duplicatione cubi inter infolubilia recenferi folet.*



PRO-

PROPOSITIO XXXIV.

THEOREMA XXIX.

Æ Qualia parallelepipeda bases habent, & altitudines reciprocas; & quorum bases, & altitudines sunt reciprocæ, ea sunt æqualia.

Dico 1, si duo parallelepipeda AD, FI (*fig.* 2. *tab.* 6.) sint æqualia, ea habere bases, & altitudines reciprocas; proindeque basis AC erit ad basim FH, ut altitudo HI est ad altitudinem CD.

PRÆPARATIO.

Sumta super altitudine HI parte HL æquali altitudini CD; ducatur per puntum L planum KL parallelum basi FH.

DEMONSTRATIO.

Quoniam (*per* 25.) solidum AD est ad solidum FI. ejusdem altitudinis (*per constr.*) sicut basis AC est ad basim FH, solidum FI, quod est æquale (*ex hyp.*) solido AD, erit ad solidum FL, ut basis AC est ad basim FH (*per* 7. 5.) Et quoniam (*per* 32.) solidum FI est ad solidum FL ejusdem basis FH, ut altitudo HI est ad altitudinem HL, aut CD ipsi æqualem (*per constr.*) evidens est (*per* 11. 5.) basim AC esse ad basim FH, ut altitudo HI est ad altitudinem CD; *quod primum erat ostendendum*.

Dico 2, si basis AC solidi AD sit ad basim FH solidi FI, ut altitudo HI est ad altitudinem CD, duo solida AD, FI esse inter se æqualia.

DE-

DEMONSTRATIO.

Manente eadem præparatione; quoniam basis AC est ad basim FH (*ex hyp.*) ut altitudo HI ad altitudinem CD, vel HL, & insuper (*per* 25.) basis AC est ad basim FH, ut solidum AD est ad solidum FL ejusdem altitudinis (*per constr.*) jam solidum AD erit ad solidum FL, ut altitudo HI est ad altitudinem HL, atque adeo (*per* 32.) ut solidum FI est ad solidum FL ejusdem basis FH; proindeque (*per* 9. 5.) duo solida AD, FI erunt æqualia; *quod demonstrandum supererat*.

SCHOLION.

Ambæ hæ demonstrationes parallelepipeda rectangula esse postulant, ut latera CD, HI pro altitudine duorum solidorum AD, FI sumi possint, quod si minime sint rectangula, poterunt fieri rectangula eo pacto, quo ad propositionem XXV dictum est, ut demonstratio locum habeat.

Propositio XXXV inutilis videtur.

PROPOSITIO XXXVI.

THEOREMA XXXI.

SI tres rectæ sint continue proportionales; quod sub omnibus fit, parallelepipedum æquale est ei, quod sub media fit.

Dico, si tres lineæ AB, AC, AD (*fig.* 3. *tab.* 6. sint continue proportionales, parallelepipedum rectangulum, quod sub iis fit, cujus scilicet tres dimensiones tribus lineis propositis sunt æquales, esse æquale cubo, quod fit sub media AC.

DE

DEMONSTRATIO.

Si ex tribus propositis lineis, AB vocetur *a*, AC vero *b*; AD denique *c*; Quoniam sunt $\div a, b, c$, (*ex hyp.*) erit $ac = bb$. Quod si utrumque productum per mediam *b* multiplicetur, erit $abc = bbb$; videlicet parallelepipedum sub tribus AB, AC, AD aequale cubo mediae AC; *quod erat ostendendum*.

PROPOSITIO XXXVII.

THEOREMA XXXII.

Parallelepipeda similia super quatuor rectis proportionalibus descripta sunt proportionalia. Si vero quatuor parallelepipeda similia sint proportionalia, eorum latera homologa erunt proportionalia.

Veritas hujus propositionis facile innotescet, si advertatur, rationes triplatas plurium rationum simplicium esse similes, si rationes simplices ipsae sint similes; & vicissim plures rationes simplices similes esse, si earum triplatae sint similes, ut clarissime constat ex iis, quae diximus ad definitionem X Libri V.

Propositio XXXVIII est corollarium propositionis XIII. Propositio XXXIX nullius videtur esse utilitatis.



PRO-

PROPOSITIO XL.

THEOREMA XXXV.

PRisma, cujus basis parallelogramma dupla est basis triangularis alterius prismatis ejusdem altitudinis, est huic æquale.

Dico, prisma, cujus basis FH (*fig.* 4. *tab.* 6.) dupla est basis ABF alterius prismatis ejusdem altitudinis, esse huic æquale.

PRÆPARATIO.

Posito, quod altitudo FK prismatis FGHIK æqualis sit altitudini AE prismatis ABCDE, ut ostendatur, ambo esse æqualia, complendum est parallelogrammum ABLF, ductis BL, LF parallelis duobus lateribus AF; AB; quod parallelogrammum erit duplum trianguli ABF (*per* 34. 1.) atque adeo æquale parallelogrammo FGHO (*ex hyp.*)

DEMONSTRATIO.

Si super duabus basibus æqualibus AL, FH excitentur duo parallelepipeda similia AM, FN ejusdem altitudinis, hæc erunt æqualia (*per* 31.) quumque duo prismata similia ABCDE, FGHIK sint eorum dimidia (*per* 28.) erunt item inter se æqualia (*per axi.* 7. 1.) *quod erat ostendendum.*

Finis Libri Septimi.



LIBER OCTAVUS.

EUCLIDIS DUODECIMUS.



A Solidis superficiei planæ, cujusmodi sunt prismata, & parallelepipeda, ad solida curvæ superficiei, a facilioribus nempe, & simplicioribus ad difficiliora, & magis composita, progredimur. De Sphæra igitur, de Cono, & de Cylindro, deque aliis ejusmodi solidis in hoc postremo libro agendum est, quibus adjicitur Pyramis, cujus natura, quod ea superficiebus planis quidem, sed minime parallelis, constet, paullo obscurior, quam sit prismatis, vel parallelepipedi natura, videtur.

DEFINITIONES.

I. P*Yramis* est solidum pluribus planis triangularibus, quorum vertices in idem punctum desinunt, terminatum, & in alio plano, tanquam in basi, constitutis.

Solidum igitur ABCD (fig. 5. tab. 5.) *pyramis vocatur, eaque triangularis dicitur, quod basim habeat triangularem ABD. Siquidem pyramis a basis figura appellationem habet; hinc cujus basis est triangularis, dicitur triangularis, cujus vero est polygona, polygona pariter nominatur.* II.

II. Si concipiatur ſemicirculus ABC (*fig.* 6. *tab.* 6.) circa ſuam diametrum AC immobilem ita moveri, ut integram circumvolutionem perficiat, hoc motu ſolidum ABCD unica ſuperficie contentum deſcribet, in quo omnia ſuperficiei puncta æque diſtant a puncto E, quod eſt in media diametro AC poſitum. Hujuſmodi ſolidum vocatur *Sphæra*, cujus dimidia pars ABC vocatur *Hemiſphærium*.

III. *Axis* ſphæræ eſt diameter AC ſemicirculi ſphæram generantis.

IV. Centrum ſphæræ eſt punctum medium E, a quo rectæ lineæ omnes ad ſphæræ ſuperficiem ductæ ſunt æquales.

V. Sphæræ diameter eſt recta quælibet per centrum ſphæræ tranſiens, & ad ſphæræ ſuperficiem utrinque pertingens; ut AC.

Nota, axem ſphæræ diametrum etiam dici poſſe, non viciſſim; in ſphæra enim infinitæ, ut ita dicam, diametri concipi poſſunt, quarum ſemiſſes ſemidiametri, *ſeu* radii, *non ſecus, ac in circulo, nominantur; at unicus eſt in ſphæra axis, circa quem ſemicirculus ſphæram generans moveri intelligitur. Duo puncta A, & C vocantur* ſphæræ Poli.

VI. Si ab aliquo puncto C extra circulum ADBF (*fig.* 7. *tab.* 6.) ducatur recta linea CA ad ejuſdem circuli circumferentiam, circa quam alterum extremum A tandiu convertatur, altero lineæ extremo immobili remanente in C, donec perveniat ad punctum A, unde moveri cœpit, ſolidum CAB a recta linea deſcriptum duabus ſuperficiebus, altera curva, & in mucronem deſinente, altera plana, & circulari conſtans, *Conus* appellabitur.

Si a puncto fixo C ad centrum G ducta recta linea CG ſit perpendicularis plano ADBF, vocabitur conus rectus, *in quo latera omnia CA, CB, æqualia ſunt. Si vero recta linea a puncto C ducta ſit plano inclinata, ut CD* (fig. 8. tab. 6.) *dicetur* conus inclinatus.)

VII. *Axis* coni eſt recta CG (*fig.* 7. *tab.* 6.

quæ per punctum fixum C, & circuli centrum G ducitur.
Nota punctum illud fixum C vocari verticem *coni.*
VIII. Si duorum circulorum æqualium, & æquidistantium AB, CD (*fig.* 10. *tab.* 6.) diametri AB, CD circa duo centra H, G semper æquidistantes moveantur, & una cum ipsis circumferatur recta linea AD diametrorum extrema A, D ad easdem partes conjungens, quoad rursus in eum locum restituatur, a quo cœpit moveri, solidum ABCD a linea AD, una cum duabus diametris BA, CD, descriptum *Cylindrus* vocabitur.
IX. *Axis* cylindri est recta linea GH centra circulorum AB, CD conjungens; quæ si sit ipsis planis circularibus perpendicularis *cylindrus rectus* dicetur; si vero sit inclinata *cylindrus* pariter *inclinatus* vocabitur.
X. *Basis* coni est circulus ADBF (*fig.* 7. *tab.* 6.)
XI. *Bases* cylindri sunt duo circuli oppositi, & æquidistantes AB, CD (*fig.* 10. *tab.* 6.)
XII. *Coni & cylindri similes* sunt, quorum axes ad diametros basium eandem rationem habent, & insuper sunt ad basim similiter inclinati, si coni, vel cylindri non recti, sed inclinati sint.
Præter has, alias solidas figuras explicat Euclides, quarum haud magnus est usus in Geometria; videlicet 1. Tetraedrum, *quod est solidum quatuor triangulis æquilateris, & æqualibus constans; hoc autem solidum est* pyramis trigona, *cujus basis, & laterales superficies sunt triangula æquilatera, & æqualia.*
2. Dodecaedrum, *quod duodecim pentagonis æqualibus, æquilateris, & æquiangulis constat.*
3. Icosaedrum, *quod viginti triangulis æquilateris, & æqualibus comprehenditur. Præter has quatuor solidas figuras, quibus addendus est* cubus, *nullam aliud constitui posse solidum regulare, quod planis æquilateris, æquiangulis, & æqualibus constet, ostendit Euclides.*
PRO-

PROPOSITIO I.

THEOREMA I.

Polygona similia circulis inscripta sunt inter se, ut quadrata diametrorum.

Dico, duo polygona AGBFE, CKDIH (*fig.* 11. *tab.* 6.) si sint similia, esse inter se, ut quadrata diametrorum FN, IO duorum circulorum, quibus sunt inscripta.

PRÆPARATIO.

Ducantur a duobus angulis æqualibus F, & I per centra L, & M binæ diametri FN, IO; itemque a duobus angulis æqualibus A, & C duæ rectæ AF, CI; denique jungantur duæ rectæ EN, HO.

DEMONSTRATIO.

Quoniam angulus AEF æqualis est angulo CHI, & quatuor latera EA, EF, HC, HI, quæ æquales angulos comprehendunt, sunt proportionalia (*ex hyp.*) duo triangula AEF, CHI erunt æquiangula (*per* 6.6.) & angulus EAF æqualis erit angulo HCI, qui quum sint æquales duobus ENF, HOI (*per* 21. 3.) hi pariter ambo erunt inter se æquales. Quare duo triangula EFN, HIO, quæ (*per* 31.3.) sunt rectangula, erunt æquiangula (*per* 32. 1.) Ex quibus colligitur, (*per* 4. 6.) quatuor lineas EF, HI, FN, IO esse proportionales. Quare polygonum AGBFE super primam EF descriptum erit (*per* 22. 6.) ad polygonum simile CKDIH descriptum super alteram HI, ut quadratum tertiæ FN ad quadratum quartæ IO; *quod operæpretium erat demonstrare*.

PRO-

PROPOSITIO II.

THEOREMA II.

PLana, seu areæ circulorum sunt inter se, ut quadrata suarum diametrorum.

Dico, areas duorum circulorum AB, CD (*fig.* 11. *tab.* 6.) esse in eadem ratione, ac sunt quadrata duarum diametrorum FN, IO.

DEMONSTRATIO.

Quoniam polygonum circulo AB inscriptum est ad polygonum simile inscriptum circulo CD, ut quadratum diametri FN est ad quadratum diametri IO (*per* 1.) atque id verum est de omnibus polygonis similibus, quæ, quo pluribus constant lateribus, eo ad circulos magis accedunt, adeo ut si infinitis lateribus constare ponantur, in circulos tandem degenerare intelligentur; (etenim circuli ut totidem polygona regularia similia infinitis lateribus constantia concipi solent a Geometris) jam manifestum est, aream circuli AB esse ad aream circuli CD, ut quadratum diametri FN ad quadratum diametri IO; *quod erat ostendendum.*

COROLLARIUM I.

Circuli sunt in ratione duplicata rationis suorum radiorum, vel diametrorum.

COROLLARIUM II.

Circuli sunt in eadem ratione, ac polygona similia ipsis inscripta.

Hæc

Hæc propositio utilissima est in Geometria, ubi agitur de quadratura circuli. Etenim circulus est æqualis triangulo, cujus altitudo æqualis sit ejusdem circuli radio, basis vero toti circumferentiæ; id vero ostendit Archimedes ex eo, quod polygonum regulare circulo inscriptum, v.g. pentagonum ABCDE (fig. 15. tab. 4.) *æquale sit triangulo, cujus basis æqualis est toti pentagoni circumferentiæ, altitudo vero æqualis perpendiculari FM a centro circuli F ad latus AB ductæ; id quod sic ostendi potest. Triangulum ABF est quinta pars pentagoni ABCDE; & proinde se habet ad ipsum pentagonum, ut* 1 *ad* 5. *Atqui idem triangulum se habet ad triangulum ejusdem altitudinis, cujus basis sit quintuplo major, item, ut* 1 *ad* 5. (per 1. 6.) *Ergo* (per 9. 5.) *pentagonum ABCDE æquale est triangulo, cujus altitudo sit FM, basis vero æqualis sit toti ejusdem pentagoni circumferentiæ. Atque eodem modo demonstrari potest, pentagonum regulare GHILK circulo circumscriptum esse æquale triangulo, cujus altitudo sit radius FA, longitudo vero toti pentagoni circumferentiæ sit æqualis.*

Ex hoc autem infert Archimedes, circulum esse æqualem triangulo cujus altitudo sit radius circuli, basis vero integræ circuli circumferentiæ sit æqualis, quum circuli concipi possint, ut polygona regularia infinitis lateribus constantia.

Major autem difficultas est in invenienda per geometricam methodum recta linea æquali circumferentiæ circuli, seu in invenienda ratione, quæ inter diametrum, & circumferentiam intercedit. Qua in re sic procedit Archimedes. Ostendit primo, polygonum 96 *laterum circulo circumscriptum continere diametrum ter, una cum* $\frac{1}{7}$, *quare circuli circumferentia continebit dia-*

me-

-metrum minus, quam ter, cum $\frac{1}{7}$; item ostendit, idem polygonum 96 laterum circulo inscriptum continere diametrum ter cum $\frac{10}{71}$; Ex quo infert, circumferentiam circuli continere diametrum, plus quam ter cum $\frac{10}{71}$. Quum igitur ratio circumferentiæ ad diametrum minor sit, quam ratio 1 ad 3, & $\frac{1}{7}$, major vero, quam ratio 1 ad 3, & $\frac{10}{71}$, si arctentur termini harum rationum, ope polygonorum plurium adhuc laterum, magis, & magis ad rationem, quæ est inter diametrum, & circumferentiam, accedere poterimus.

Id autem præstiterunt quamplures accuratissimi Geometræ, inter quos Metius, qui rationem diametri ad circumferentiam posuit, ut 113 ad 355 circiter. Alii alias etiam exactiores invenerunt; quas tamen omittimus, quum instituti nostri ratio id minime postulare videatur.

Hæc eadem propositio utilis est pariter in Astronomia, ubi areæ circulares, quas corpora cœlestia suis revolutionibus describunt, inter se comparantur; eæ enim sunt inter se fere, ut quadrata distantiarum corporum cœlestium a centro eorum motus.

Omittimus hic Propositiones III, & IV, quæ juxta nostram methodum sunt superfluæ.



PRO-

PROPOSITIO V. & VI.

THEOREMA V. & VI.

PYramides ejusdem altitudinis sunt inter se, quemadmodum earum bases.

Dico, binas pyramides ABC, BED (*fig.9. tab.6.*) ejusdem altitudinis esse inter se, ut earum bases AB, BE; sive bases sint triangulares, ut habet propositio V, sive polygonæ, ut statuit propositio VI.

DEMONSTRATIO.

Si in duabus pyramidibus ABC, BED per singula altitudinis earum puncta ducantur per cogitationem totidem plana basibus parallela, ea erunt in utraque pyramide, & numero æqualia, & basibus similia, quum eadem sit utriusque pyramidis altitudo (*ex hyp.*) Quare singula plana, unius pyramidis seorsum sumta erunt ad suam basim, ut singula plana iis respondentia item seorsum sumta alterius pyramidis erunt ad suam basim (*per* 22. 6.) quum plana similia latera habeant proportionalia. Ergo omnia etiam plana unius pyramidis simul sumta, seu tota pyramis ABC, erit ad suam basim AB, ut omnia plana alterius, sive tota pyramis BED, est ad suam basim (*per* 24. 5.) atque alternando (*per* 16. 5.) pyramis ABC erit ad pyramidem BED, ut basis AB ad basim DE; *quod erat ostendendum*.



PROPOSITIO VII.

THEOREMA VII.

PYramis eſt triens, ſeu tertia pars priſmatis, ejuſdem baſis, & altitudinis.

Dico 1, pyramidem, quæ baſim habet triangularem AEF (*fig.* 12. *tab.* 6.) vel BCD, eſſe tertiam partem priſmatis ABCDEF eandem baſim AEF, & eandem altitudinem habentis.

DEMONSTRATIO.

Ductis tribus diagonalibus AC, AD, CE, quæ tria parallelogramma bifariam divident (*per* 34. 1.) manifeſtum eſt, priſma ABCDEF compoſitum eſſe ex tribus pyramidibus triangularibus ABCD, ACEF, AEDC, quas omnes æquales eſſe ſic oſtenditur.

Quoniam duæ pyramides ABCD, ADEC habent eundem verticem C, & proinde ejuſdem ſunt altitudinis, & earum baſes ADB, ADE ſunt æquales (*per* 34. 1.) jam ſunt inter ſe æquales (*per* 5.) Item quoniam duæ pyramides ACDE, ACEF habent eundem verticem A, earumque baſes CED, CEF ſunt æquales (*per* 34. 1.) ſunt item æquales (*per* 5.) Ex quo ſequitur, tres pyramides, ex quibus priſma triangulare ABCDEF conſtat, eſſe inter ſe æquales, *quod primum erat oſtendendum*.

Dico 2, pyramidem, cujus baſis eſt polygona, eſſe tertiam partem priſmatis eandem baſim, eandemque altitudinem habentis. Id autem per ſe manifeſtum eſt; nam ut baſis polygona in plura triangula, ita priſma polygonum in plura priſmata triangularia dividi poteſt, ductis per quamlibet baſis ſectionem planis eidem

dem basi perpendicularibus. Quodlibet autem horum prismatum tres pyramides æquales continebit, per præcedentem demonstrationem, ex quo sequitur (*per.* 12. 5.) pyramidem polygonam esse trientem prismatis ejusdem basis, & ejusdem altitudinis; *quod supererat demostrandum*.

Hujus propositionis beneficio, pyramidis soliditatem, cujus nota sit basis, & altitudo, invenire facile est. Si enim multiplices altitudinem per basim, habebis soliditatem prismatis, cujus triens erit pyramidis propositæ soliditas. Idipsum præstabis, si basim per trientem altitudinis, vel altitudinem per basis trientem multiplices.

PROPOSITIO VIII.

THEOREMA VIII.

PYramides similes sunt in ratione triplicata rationis suorum laterum homologorum.

Propositio hæc evidens est (*per* 33. 7.) pyramides enim similes sunt totidem trientes totidem prismatum similium (*per* 7.) quæ quum sint in ratione triplicata rationis suorum laterum homologorum; pyramides etiam (*per* 15. 5.) in eadem erunt ratione; *quod erat ostendendum*.



PRO-

PROPOSITIO IX.

THEOREMA IX.

Pyramides æquales habent baſes, & altitudines reciprocas; & quarum baſes, & altitudines ſunt reciprocæ, eæ ſunt æquales.

Dico 1, Si duæ pyramides æquales ſint, baſis unius erit ad baſim alterius, ut hujus altitudo eſt ad altitudinem prioris.

DEMONSTRATIO.

Si ſuper duarum pyramidum æqualium baſibus concipiantur duo priſmata ejuſdem altitudinis, hæc erunt æqualia (*per ax.* 6. 1.) quum ambo ſint tripla duorum pyramidum æqualium (*per* 7.) Atqui hæc habebunt baſes, & altitudines reciprocas (*per* 34. 7.) Ergo baſes, & altitudines pyramidum æqualium ſunt reciprocæ, ſunt enim eædem, ac priſmatum; *quod primum fuit oſtendendum*.

Dico 2, ſi baſis unius pyramidis ſit ad baſim alterius, ut hujus altitudo eſt ad altitudinem prioris, ambæ pyramides erunt æquales.

DEMONSTRATIO.

Si ſuper baſes duarum pyramidum propoſitarum concipiantur duo priſmata ejuſdem altitudinis, hæc erunt æqualia (*per* 34. 7.) Ergo etiam eorum trientes; *quod ſupererat oſtendendum*.

PRO-

PROPOSITIO X.

THEOREMA X.

Conus est triens cylindri eandem basim, & eandem altitudinem habentis.

DEMONSTRATIO.

Sicut circulus concipitur, ut polygonum infinitorum laterum, ita cylindrus concipi potest, ut prisma infinitorum laterum, & eadem de caussa conus, ut pyramis infinitorum laterum. Quum igitur (*per* 7.) pyramis polygona sit triens prismatis eandem basim, & eandem altitudinem habentis; id etiam de cono comparate ad cylindrum dici debet; *quod demonstrandum susceperamus*.

PROPOSITIO XI.

THEOREMA XI.

Cylindri, & coni ejusdem altitudinis sunt inter se, quemadmodum eorum bases.

Propositio evidens est; & quidem ad cylindros quod spectat, quum ii spectentur, ut prismata infinitorum laterum, si sint ejusdem altitudinis (*ex hyp.*) erunt inter se, ut eorum bases, ut notavimus ad propositionem XXXI. Libri VII. Quod vero ad conos attinet, ii pariter, si sint ejusdem altitudinis, erunt inter se, sicut bases (*per* 6.) quum sint pyramides infinitorum laterum.

Hinc colligi potest, cylindros eandem basim, vel aequa-

æqualem, eandemque altitudinem habentes, esse inter se æquales; quocirca ut constituatur cylindrus rectus æqualis cylindro inclinato, nihil aliud requiritur, nisi ut super basim cylindri inclinati elevetur cylindrus rectus ad eandem altitudinem, qui cylindro inclinato erit æqualis, ut notavimus ad Propositionem XXV Libri VII.

PROPOSITIO XII.

THEOREMA XII.

CYlindri, & coni similes sunt in ratione triplicata rationis diametrorum suarum basium circularium.

Prima pars propositionis evidens est (*per* 33. 7.) quum cylindri similes sint totidem prismata similia infinitorum laterum; ex quo concluditur, cylindros esse in ratione triplicata rationis suorum diametruum, quæ sunt, ut latera homologa cylindrorum similium. Secunda etiam pars evidens est (*per* 8.) Nam coni sunt pyramides infinitorum laterum, quæ sunt in ratione triplicata rationis suorum laterum homologorum; diametri enim conorum similium sunt inter se, ut eorundem latera homologa.

COROLLARIUM I.

Coni similes sunt inter se ut cubi suorum axium; nam axes in conis similibus sunt in eadem ratione, ac diamatri basium, ob angulos æquales, quos axes cum diametris in conis similibus efficiunt (*per def.* 12.)

CO-

COROLLARIUM II.

Coni ſimiles ſunt inter ſe, ut cubi ſuorum laterum baſibus inclinatorum; nam hæc latera ſunt proportionalia diametris baſium ob angulos æquales, quos una cum diametris conſtituunt. Ex quo ſequitur, cylindros, & conos ſimiles eſſe pariter in ratione triplicata rationis ſuarum altitudinum. Nam ſi cylindri, & coni recti ſint, eorum altitudines cum ipſorum axibus convenient; ſi vero ſint ſimiliter inclinati, triangula æquiangula cum eorum axibus, & diametris (*per* 6. 6.) conſtituent, & proinde (*per* 4. 6.) erunt diametris, & axibus proportionales.

PROPOSITIO XIII.

THEOREMA XIII.

SI cylindrus per planum baſibus parallelum ſecetur, axis partes erunt in eadem ratione, ac partes cylindri.

Dico, ſi cylindrus ABCD (*fig.* 10. *tab.* 6.) plano EF baſibus AB, CD parallelo ſectus ſit, partem cylindri AF eſſe ad partem EC, ut pars axis HI eſt ad partem IG.

PRÆPARATIO.

Secentur biſariam ambæ partes HI, IG in punctis K, P, per quæ ducantur duo plana LM, NO baſibus parallela; quæ duo plana biſariam divident duos cylindros AF, EC; ſcilicet ambo cylindri AM, LF, non ſecus ac duo EO, NC erunt ejuſdem altitudinis, & baſis, & proinde æquales (*per* 11.).

DE-

DEMONSTRATIO.

Quoniam (*per* 15. 5.) cylindrus AF est ad sui dimidium AM, ut cylindrus EC est ad sui dimidium EO; & similiter axis HI est ad dimidium HK, ut axis IG est ad sui dimidium IP, proportio, quæ intercedit inter quatuor cylindros AF, AM, EC, EO, similis est ei, quæ interest inter quatuor lineas HI, HK, IG, IP. Quare alternando (*per* 16. 5.) proportio, quæ intercedit inter quatuor cylindros AF, EC, AM, EO similis erit proportioni, quæ intercedit inter quatuor lineas HI, IG, HK, IP; & proinde eadem erit ratio cylindri AF ad cylindrum EC, ac axis HI ad axem IG; *quod operæpretium erat demonstrare*.

PROPOSITIO XIV.

THEOREMA XIV.

Cylindri, & coni, qui bases æquales habent, sunt inter se, quemadmodum eorum altitudines.

Dico 1, cylindros æquales bases habentes esse inter se, ut eorum altitudines. Quod quidem evidens est; nam quemadmodum prismata ejusdem basis sunt inter se, sicut eorum altitudines (*per* 32. 7.) idipsum dicendum est de cylindris, qui spectari possunt, ut prismata infinitorum laterum.

Dico 2, conos qui bases æquales habent, esse inter se, sicut eorum altitudines. Quod pariter evidens est. Etenim coni sunt tertia pars cylindri eandem basim, & altitudinem habentis (*per* 10.) proindeque quod de cylindris ostensum est, id etiam conis convenire debet (*per* 15. 5.)

PRO-

PROPOSITIO XV.

THEOREMA XV.

Cylindri. & coni æquales, habent altitudines, & bases reciprocas; & quorum bases, & altitudines sunt reciprocæ, ii sunt æquales.

Propositio evidens est (*per* 34.) in eo quod spectat ad cylindros; ad conos vero quod attinet, item evidens est (*per* 9.)

Omittimus hic Propositiones XVI, & XVII, tum quod paullo difficiliores sint, tum etiam, quod sine ipsis Propositio XVIII optime demonstrari possit, ut suo loco videbimus.

De cylindris, & conis ulterius non agit Euclides, eorum tamen tractationem persequuti sunt alii celeberrimi Geometræ, quos inter Archimedes, Apollonius Pergæus, Serenus Antinsensis, & alii. Et quidem ad Apollonium quod spectat, is octo libros conicorum edidit, ex quibus quatuor tantum ad nos pervenerunt, in quibus de sectionibus conicis agit. Serenus itidem duos libros edidit, quorum alterum de sectione coni, alterum vero de sectione cylindri inscripsit. Atque id, quod pertinet ad veteres. Ad recentiores vero Geometras quod attinet, hi non assequuti sunt veteres modo, sed post se eos longe reliquerunt, hancque Geometriæ partem, quæ de sectionibus conicis est, adeo illustrarunt, ut difficillima quæque theoremata, atque ex iis nonnulla, quæ a veteribus insolubilia credebantur, facili negotio, ope novæ analyseos, explicaverint. Celeberrimus inter alios extat de sectionibus conicis liber clarissimi viri Marchionis

nis

nis de l'Hospital *gallice conscriptus, quo potissimum utuntur matheseos studiosi. Nobis, qui Geometriæ Elementa duntaxat tradere statuimus, nonnulla ex iis, quæ ab Apollonio pertractata sunt, delibasse satis erit ad aliqualem intelligentiam eorum, quæ de corporum projectorum, & planetarum motibus, nec non de variis conspicillorum generibus in scholasticis Philosophiæ institutionibus tradi solent. Non ad omnia, quæ a nobis afferentur, demonstrationes adhibebimus; sed ad ea duntaxat, quæ per propositiones in Geometriæ Elementis explicatas ostendi possunt.*

1. *Quinque modis secari potest conus. Primum enim secatur plano per axem ducto, nimirum plano, quod incipiens a vertice coni C* (fig. 7. tab. 6.) *per axem CG transeat, quæ sectio triangulum æquicrure ABC* (*hic siquidem coni recti solummodo sectionem spectamus*) *exhibet.*

2. *Deinde secari potest conus plano basi parallelo, quæ sectio circulum dabit.*

3. *Item secari potest conus plano alicui lateri coni parallelo, puta plano DEF, cujus diameter EG parallela sit lateri BC; quæ sectio vocatur* Parabola.

4. *Quarto secatur conus rectus plano, quod utrumque coni latus utrimque dividat, sed basi minime sit parallelum, ut HI; hujusmodi autem sectio vocatur* Ellipsis.

5. *Quinto denique secari potest conus plano HIK, non quidem a vertice C* (fig 15. tab. 6.) *ducto, quod basi AHBK ita insistat, ut sectionis diameter LI producta cum coni latere AC ultra coni verticem producto in P concurrat. Hæc autem sectio vocatur* Hyperbola. *Ad duas priores coni sectiones quod attinet,* triangulum *nimirum, &* circulum, *de iis satis superque dictum est in Geometriæ elementis; superest, ut de reliquis tribus aliquid dicamus. Et primo quidem, ut a parabola incipiamus, ut ejus natura clarius percipia-*

cipiatur, omnia, quæ vel parabolam constituunt, vel ad eam quoquo modo pertinent seorsum sunt explicanda.

6. *Primum occurrit* axis, *qui etiam diameter dicitur*; axis *parabolæ est recta linea, quæ a vertice plani parabolici ducta, planum ipsum bifariam secat, ut AB* (fig. 14. tab. 6.) *cujus punctum A dicitur origo axis.*

7. *Rectæ lineæ FG, HI, NL &c. axi AB perpendiculares vocantur* ordinatæ, *seu* ordinatim applicatæ ad axem.

8. *Recta AE vocatur* parameter, *quæ in ea ratione est cum ordinatis, ut quælibet ordinata, sit media proportionalis inter rectam AE, & eam axis partem, quæ ab ordinata intercipitur; hinc recta FG est media proportionalis inter AF, & AE; & HI inter AH, AE, &c.*

9. Focus, *seu* umbilicus *parabolæ est punctum distans ab axis origine A quarta parametri parte, v. g. punctum F; quocirca recta AE erit quadrupla rectæ AF. Dicitur focus, quoniam radii axi paralleli in vitrum parabolicum incidentes, circa illud punctum F colligantur. Reliquæ lineæ a quovis parabolæ puncto ductæ axi æquidistantes vocantur* diametri *parabolæ, ut linea IP.*

10. *Hinc colligi potest, in quo sita sit parabolæ natura, est enim parabola* linea curva, in qua quadrata ordinatarum sunt inter se, ut partes axis ab ordinatis interceptæ; *quod quidem sic ostenditur. Quum enim dictum sit n. 8. quamlibet ordinatam esse mediam proportionalem inter parametrum, & axis partem ab ordinata interceptam, jam quadratum ordinatæ FG erit æquale rectangulo sub AF, AE* (per 17. 6.) *quadratum vero ordinatæ HI æquale rectangulo sub AH, AE, &c. atqui rectangulum sub AF, AE est ad rectangulum sub AH, AE ejusdem altitudinis in E, ut basis AF est ad basim AH* (per 1. 6.) *Ergo*

 qua-

quadratum ordinatæ FG erit ad quadratum ordinatæ HI, ut pars axis AF est ad partem axis AH. Hanc autem propositionem ostendit Apollonius propositione XX Libri I.

11. *Si quis igitur, datis diametro, & parametro quibusquumque, velit lineam parabolicam describere, hac methodo uti poterit. Sumantur super axem AB qualibet puncta, v. g. F, H, N, M &c. a quibus excitentur rectæ FG, HI, NL, MK axi AB perpendiculares, quarum quælibet sit media proportionalis inter parametrum datam AE, & partem axis a se interceptam. Denique secundum puncta G, I, L, K ducatur curva AGILKD, quæ erit semissis parabolæ, quæ inquiritur. Alia pars AD describi poterit, si ducantur totidem ordinatæ ex alia parte æquales prioribus v. g. FO, HD, &c.*

12. *Parabola fieri potest amplior, vel contractior pro libito, prout parameter longior est, aut brevior; quo enim longior est parameter, eo apertior erit parabola.*

13. *Alio modo parabolæ constructionem exponit* De l'Hospital *Libro I Conicorum Definitione I, quæ multo simplicior est, & facilior; eam tamen brevitatis gratia omittimus.*

14. *In Ellipsi pariter plura veniunt consideranda, quibus explicatis, ejus natura facile innotescet. Duo igitur sunt in ellipsi axes, qui* conjugati *vocantur, ut AB, CD* (fig. 13. tab. 6.) *quique bifariam ad angulos rectos sese intersecant. Quocirca quum utrique axi rectæ lineæ ordinatim ad rectos angulos aptari possint, hinc duplicem parametrum habet ellipsis, quarum altera axis majoris, altera axis minoris dicitur. Punctum medium G* centrum *vocatur.*

15. *Ut inveniatur parameter axis majoris, invenienda est tertia proportionalis minor duobus axibus AB, CD, v. g. AE; quæ erit parameter axis AB. Parameter autem axis minoris CD erit tertia proportionalis major duobus axibus CD, AB, nimirum CF.*

16.

16. *Ut inveniantur ellipseos foci describatur ab axis minoris extremo C, intervallo vero AG, vel GB arcus PQI, qui dabit duo puncta I, P, quæ erunt foci ellipsis, a quibus ductæ rectæ lineæ ad quodvis circumferentiæ punctum, ut CI, CP, vel PH, HI, ambæ simul sumtæ æquales erunt toti axi majori AB.*

17. *Si igitur datis duobus axibus quibusquumque, ellipsim describere oporteat, v. g. AB, CD; inveniantur duo foci I, P, ut n. 16. dictum est; deinde sumatur filum ICP æquale toti axi majori AB, cujus fili extrema I, P statuantur fixa in focis I, P. Hoc autem filum si circumducatur stylo ex una parte per puncta A, H, C, B; ex alia vero per ADB, ellipsim ACBD describet.*

18. *Ex quo colligitur, ellipsim esse* lineam curvam undique terminatam, in qua singula circumferentiæ puncta sic distant a focis, ut ambæ distantiæ simul sumtæ æquales sint toti axi majori; *siquidem ambæ distantiæ CP, CI, vel HP, HI simul sumtæ æquales sunt filo ICP, quod est æquale axi AB.*

19. *Ellipsis potest esse magis, vel minus oblonga pro libito. Etenim quo foci propius ad extrema axis majoris AB accedent, eo oblongior futura est ellipsis; quo vero centro G propiores erunt, eo crassior erit, adeout si in punctum G ambo concurrerent, ellipsis in circulum degeneraret.*

20. *Quod spectat ad ordinatas, quæ utrique axi applicantur, observavit Apollonius Lib.* I Conicorum *Propositione XV, & ex eo Serenus* De sectione Cylindri *Propositione XVI. (siquidem ellipsis non tam sectio conica, quam cylindrica dici potest) observavit, inquam, quadrata ordinatarum deficere a rectangulo, quod fit sub parametro, & axis portione ab ordinata intercepta, deficere, inquam, figura simili ei, quod sub toto axe, & parametro fit, rectangulo.*

21. *Quadratum igitur ordinatæ HI deficit a rectangulo sub AI, AE comprehenso, deficit inquam, rectan-*

ctangulo ER, quod quidem rectangulum simile est (per 24. 6.) *ei rectangulo, quod fit sub axe majore AB, & parametro AE; quare quadratum HI aequale erit rectangulo AR. Idipsum dicendum est de recta LH, quae est ordinata ad axem minorem CD, cujus item quadratum deficit a rectangulo sub parametro CF, & parte axis CL, deficit, inquam, figura FS, quae* (per 24. 6.) *similis est rectangulo sub axe CD, & tota parametro CF.*

22. *Hinc colligitur, per hypotenusam BE trianguli rectanguli ABE inveniri posse parametri partem, AN, sub qua, una cum axis parte AI ab ordinata HI intercepta, continetur rectangulum aequale quadrato ejusdem ordinatae HI. Si enim ordinata HI producatur, quoad occurrat hypotenusae BE in puncto R, a quo excitetur perpendicularis RN, haec dabit partem AN, quae inquiritur. Idem dic de hypotenusa DF trianguli rectanguli CDF, ex cujus puncto S ducta perpendicularis SO dabit partem CO, sub qua, una cum parte axis CL, constituitur rectangulum aequale quadrato ordinatae HL.*

23. *Id autem totum geometrica ratione ostendit Apollonius loco supra citato, quam in medio relinquimus; quod aliis propositionibus, quas ante ipsam Apollonius explicat, innitatur, quas omnes referre nimis longum esset. Nota hic, hujusmodi sectionem idcirco vocari* Ellipsim, *quod vocabulum defectum significat, quod in ea quadrata ordinatarum deficiant, ut dictum est, a rectangulo, quod fit sub parametro, & diametri parte ab ordinata intercepta; secus ac in parabola contingit, in qua quadrata ordinatarum ejusmodi rectangulo sunt omnino aequalia, ut n.* 10. *ostensum est, ex quo parabolae nomen desumtum est, quod aequalitatem significat.*

24. *In hyperbola, contra ac in ellipsi, quadratum ordinatae KL* (fig. 16. tab. 6.) *excedit rectangulum sub parametro BD, & parte axis BK, excedit, inquam rectangulo DM, quod est simile* (per 24. 6.) *ei rectangulo, quod fit sub primo axe BE, & eodem parametro BD;*

quae

quæ quidem omnia planius sunt explicanda.

25. *Dictum est supra n. 5. quod si secetur conus rectus ABC* (fig. 15. tab. 6.) *plano HIK, cujus diameter LI producta incurrat in alterum coni latus AC productum in P, sectio HIK erit* hyperbola. *Quod si planum HIK productum in P incurrat in alterum conum DCE priori cono ABC ad verticem oppositum, fient duæ hyperboles omnino similes HIK, MPN, quæ* sectiones oppositæ *vocantur.*

26. *In hisce oppositis sectionibus linea OL vocatur* axis communis, *pars vero IP inter utramque sectionem intercepta* primus axis, *cujus punctum medium Q oppositarum sectionum centrum appellatur. Has autem sectiones seorsum a cono claritatis gratia spectabimus* (fig. 16. tab. 6.) *Igitur recta HI est axis communis; recta BE primus axis; punctum N centrum oppositarum sectionum; recta RS per centrum N transiens vocatur secundus axis, qui a primo axe bifariam ad rectos angulos dividitur. Hic autem secundus axis in hyperbola, non secus ac in ellipsi, est media proportionalis inter primum axem EB, & parametrum primi axis BD; ita Apollonius in secundis definitionibus libri I. Definitione IV. Vicissim primus axis est media proportionalis inter secundum axem, & parametrum secundi axis. Ambo axes BE, RS* conjugati *appellantur.*

27. *Duæ rectæ AF, CG, quæ in centro N sese intersecant, vocantur* asymtoti, *ideo quod nunquam hyperbolæ occurrant, licet dum ulterius producuntur, semper eidem propius accedant. Hinc facilis est per asymtotos hyperbolæ constructio; ductis enim duabus rectis AB, AC* (fig. 17. tab. 6.) *angulum quemquumquem BAC continentibus, dividatur bifariam idem angulus BAC per rectam AE. Tum per punctum D sumtum ad libitum in recta AE ducantur ex una parte rectæ* 1 *K*, 2 *F*, 3 *G &c. ex alia vero rectæ* 4 *R*, 5 *H*, 6 *I &c. deinde in unaquaque harum linearum notentur puncta Q, L, M,*

P,

P, O, N, adeont KN v. g. æqualis sit 1 *D*, *FO æqualis* 2 *D*, *RQ æqualis* 4 *D*, *& sic de ceteris*. *Denique a puncto D per puncta P, O, N ex una parte ducatur linea D-PON, quæ erit dimidia pars hyperbolæ, ex altera vero per puncta M, L, Q ducatur linea DMLQ, quæ erit hyperbola, quæ inquiritur, cujus duo asymtoti AK, AR, licet ad eam semper propius accedant, nunquam tamen cum ea concurrent, quum lineæ omnes per punctum D ductæ nunquam cum rectis AK, AR convenire possint, ut clarum est.*

28. *Data hyperbola, ejusque primo axe, qui major, vel minor ad libitum sumi potest, ejusdem axis parameter, tum axis secundus, & foci hyperboles sunt inveniendi. Sit igitur hyperbola ABC, ejusque opposita FEG* (fig. 16. tab. 6.) *Ut inveniatur parameter axis BE, ducatur ordinata quæquumque KL, eaque producta in M, fiat ut BK ad KL ita KL ad KM; junctaque recta EM, excitetur a puncto B recta BD perpendicularis axi BE, quæ occurrens rectæ EM in puncto D, dabit parametrum BD axis BE. Nam si BD producatur in O, juncta recta MO perpendiculari MK, manifestum est* (per 17. 6.) *quadratum ordinatæ KL æquale esse rectangulo BM; adeoque excedere rectangulum sub parametro BD, & parte axis BK, rectangulo DM; quod quidem rectangulum simile est* (per 24. 6.) *ei rectangulo, quod fit sub primo axe BE, & parametro BD; in quo sane sitam esse hyperbolæ naturam, ostendunt Geometræ, ut dictum est n. 24.*

29. *Inventa parametro invenietur secundus axis RS, qui, ut diximus n.26, est media proportionalis inter primum axem, & ejus parametrum.*

30. *Ope secundi axis inveniuntur oppositarum sectionum foci P, Q. Nam foci hyperboles distant a centro N longitudine hypotenusæ BS. Atque hæc de coni sectionibus satis dicta esse, volumus.*

PRO-

PROPOSITIO XVIII.

THEOREMA XVIII.

SPhæræ ſunt in ratione triplicata rationis ſuarum diametrorum.

DEMONSTRATIO.

Si ſphæra concipiatur conſtare ex infinitis pyramidibus æqualibus, quarum vertices in ſphæræ centrum deſinant, baſes autem in ejuſdem ſuperficie ſint conſtitutæ, (quum enim eæ infinite parvæ ſtatuantur, poſſunt, ut planæ conſiderari) horum omnium pyramidum ſumma æqualis erit pyramidi cujus altitudo ſit ſphæræ radius, baſis autem integra ſphæræ ſuperficies (*per* 5. *&* 6.) Quoniam vero pyramis hæc ſimilis eſt alii pyramidi, quæ eodem modo alteri ſphæræ æqualis ſtatui poteſt (ſiquidem ſphæræ omnes ſimiles ſunt, proindeque eadem eſt in omnibus ratio diametri ad circumferentiam) jam hæ pyramides erunt (*per* 8.) in ratione triplicata rationis ſuorum laterum homologorum; & proinde etiam ſphæræ ipſis æquales; *quod erat oſtendendum*.

COROLLARIUM.

Sphæræ ſunt in eadem ratione, ac cubi ſuarum diametrorum, qui (*per* 33. 7.) ſunt in ratione triplicata rationis ſuorum laterum.

Ex his colligere poſſumus, ſphæram eſſe æqualem cono, cujus altitudo ſit integra ſphæræ diameter, baſis vero dimidia ſphæræ circumferentia; id autem conſequitur ex propoſitionibus IX, & XV. Præclariſſima

circa sphæram theoremata, non minus quam circa conum, & cylindrum, proponit, & demonstrat Archimedes, atque illud imprimis, superficiem sphæræ æqualem esse quatuor maximis ejusdem sphæræ circulis. Ex quo theoremate (per 1.) *facile inveniri potest circulus toti sphæræ superficiei æqualis, nimirum is, cujus diameter sit dupla diametri sphæræ.*

Hujus propositionis usus maximus est in physica, & præsertim in astronomia; siquidem cognita ratione, quæ inter corporum cælestium diametros intercedit, invenietur facile ratio, quæ intercedit inter eorum soliditatem. Hinc si diameter terræ sit ad solis diametrum, ut 1 *ad* 100, *soliditas terræ erit solis ad soliditatem, ut* 1 *ad* 1000000.

FINIS.

INDEX.

A

B

C

D

E

Fi-

F

G

H

I

L

S

T

V

FINIS.

ctangulo ER, quod quidem rectangulum simile est (per 24. 6.) *ei rectangulo, quod fit sub axe majore AB, & parametro AE; quare quadratum HI aequale erit rectangulo AR. Idipsum dicendum est de recta LH, quae est ordinata ad axem minorem CD, cujus item quadratum deficit a rectangulo sub parametro CF, & parte axis CL, deficit, inquam, figura FS, quae* (per 24. 6.) *similis est rectangulo sub axe CD, & tota parametro CF.*

22. *Hinc colligitur, per hypotenusam BE trianguli rectanguli ABE inveniri posse parametri partem, AN, sub qua, una cum axis parte AI ab ordinata HI intercepta, continetur rectangulum aequale quadrato ejusdem ordinatae HI. Si enim ordinata HI producatur, quoad occurrat hypotenusae BE in puncto R, a quo excitetur perpendicularis RN, haec dabit partem AN, quae inquiritur. Idem dic de hypotenusa DF trianguli rectanguli CDF, ex cujus puncto S ducta perpendicularis SO dabit partem CO, sub qua, una cum parte axis CL, constituitur rectangulum aequale quadrato ordinatae HL.*

23. *Id autem totum geometrica ratione ostendit Apollonius loco supra citato, quam in medio relinquimus; quod aliis propositionibus, quas ante ipsam Apollonius explicat, innitatur, quas omnes referre nimis longum esset. Nota hic, hujusmodi sectionem idcirco vocari* Ellipsim, *quod vocabulum defectum significat, quod in ea quadrata ordinatarum deficiant, ut dictum est, a rectangulo, quod fit sub parametro, & diametri parte ab ordinata intercepta; secus ac in parabola contingit, in qua quadrata ordinatarum ejusmodi rectangulo sunt omnino aequalia, ut n.* 10. *ostensum est, ex quo parabolae nomen desumtum est, quod aequalitatem significat.*

24. *In hyperbola, contra ac in ellipsi, quadratum ordinatae KL* (fig. 16. tab. 6.) *excedit rectangulum sub parametro BD, & parte axis BK, excedit, inquam rectangulo DM, quod est simile* (per 24. 6.) *ei rectangulo, quod fit sub primo axe BE, & eodem parametro BD;*

quae

quæ quidem omnia planius sunt explicanda.

25. *Dictum est supra n. 5. quod si secetur conus rectus ABC* (fig. 15. tab. 6.) *plano HIK, cujus diameter LI producta incurrat in alterum coni latus AC productum in P, sectio HIK erit* hyperbola. *Quod si planum HIK productum in P incurrat in alterum conum DCE priori cono ABC ad verticem oppositum, fient duæ hyperboles omnino similes HIK, MPN, quæ* sectiones oppositæ *vocantur*.

26. *In hisce oppositis sectionibus linea OL vocatur* axis communis, *pars vero IP inter utramque sectionem intercepta* primus axis, *cujus punctum medium Q oppositarum sectionum centrum appellatur. Has autem sectiones seorsum a cono claritatis gratia spectabimus* (fig. 16. tab. 6.) *Igitur recta HI est axis communis; recta BE primus axis; punctum N centrum oppositarum sectionum; recta RS per centrum N transiens vocatur secundus axis, qui a primo axe bifariam ad rectos angulos dividitur. Hic autem secundus axis in hyperbola, non secus ac in ellipsi, est media proportionalis inter primum axem EB, & parametrum primi axis BD; ita Apollonius in secundis definitionibus libri I. Definitione IV. Vicissim primus axis est media proportionalis inter secundum axem, & parametrum secundi axis. Ambo axes BE, RS* conjugati *appellantur*.

27. *Duæ rectæ AF, CG, quæ in centro N sese intersecant, vocantur* asymtoti, *ideo quod nunquam hyperbolæ occurrant, licet dum ulterius producuntur, semper eidem propius accedant. Hinc facilis est per asymtotos hyperbolæ constructio; ductis enim duabus rectis AB, AC* (fig. 17. tab. 6.) *angulum quemquumquem BAC continentibus, dividatur bifariam idem angulus BAC per rectam AE. Tum per punctum D sumtum ad libitum in recta AE ducantur ex una parte rectæ 1 K, 2 F, 3 G &c. ex alia vero rectæ 4 R, 5 H, 6 I &c. deinde in unaquaque harum linearum notentur puncta Q, L, M,*

P,

P, O, N, adeout KN v. g. æqualis sit 1 *D*, *FO æqualis* 2 *D*, *RQ æqualis* 4 *D*, *& sic de ceteris*. *Denique a puncto D per puncta P, O, N ex una parte ducatur linea DPON, quæ erit dimidia pars hyperbolæ, ex altera vero per puncta M, L, Q ducatur linea DMLQ, quæ erit hyperbola, quæ inquiritur, cujus duo asymtoti AK, AR, licet ad eam semper propius accedant, nunquam tamen cum ea concurrent, quum lineæ omnes per punctum D ductæ nunquam cum rectis AK, AR convenire possint, ut clarum est.*

28. *Data hyperbola, ejusque primo axe, qui major, vel minor ad libitum sumi potest, ejusdem axis parameter, tum axis secundus, & foci hyperboles sunt inveniendi. Sit igitur hyperbola ABC, ejusque opposita FEG* (fig. 16. tab. 6.) *Ut inveniatur parameter axis BE, ducatur ordinata quæquumque KL, eaque producta in M, fiat ut BK ad KL ita KL ad KM; junctaque recta EM, excitetur a puncto B recta BD perpendicularis axi BE, quæ occurrens rectæ EM in puncto D, dabit parametrum BD axis BE. Nam si BD producatur in O, juncta recta MO perpendiculari MK, manifestum est* (per 17. 6.) *quadratum ordinatæ KL æquale esse rectangulo BM; adeoque excedere rectangulum sub parametro BD, & parte axis BK, rectangulo DM; quod quidem rectangulum simile est* (per 24. 6.) *ei rectangulo, quod fit sub primo axe BE, & parametro BD; in quo sane sitam esse hyperbolæ naturam, ostendunt Geometræ, ut dictum est n. 24.*

29. *Inventa parametro invenietur secundus axis RS, qui, ut diximus n. 26, est media proportionalis inter primum axem, & ejus parametrum.*

30. *Ope secundi axis inveniuntur oppositarum sectionum foci P, Q. Nam foci hyperboles distant a centro N longitudine hypotenusæ BS. Atque hæc de coni sectionibus satis dicta esse, volumus.*

PRO-

PROPOSITIO XVIII.

THEOREMA XVIII.

SPhæræ ſunt in ratione triplicata rationis ſuarum diametrorum.

DEMONSTRATIO.

Si ſphæra concipiatur conſtare ex infinitis pyramidibus æqualibus, quarum vertices in ſphæræ centrum deſinant, baſes autem in ejuſdem ſuperficie ſint conſtitutæ, (quum enim eæ infinite parvæ ſtatuantur, poſſunt, ut planæ conſiderari) horum omnium pyramidum ſumma æqualis erit pyramidi cujus altitudo ſit ſphæræ radius, baſis autem integra ſphæræ ſuperficies (*per* 5. & 6.) Quoniam vero pyramis hæc ſimilis eſt alii pyramidi, quæ eodem modo alteri ſphæræ æqualis ſtatui poteſt (ſiquidem ſphæræ omnes ſimiles ſunt, proindeque eadem eſt in omnibus ratio diametri ad circumferentiam) jam hæ pyramides erunt (*per* 8.) in ratione triplicata rationis ſuorum laterum homologorum; & proinde etiam ſphæræ ipſis æquales; *quod erat oſtendendum*.

COROLLARIUM.

Sphæræ ſunt in eadem ratione, ac cubi ſuarum diametrorum, qui (*per* 33. 7.) ſunt in ratione triplicata rationis ſuorum laterum.

Ex his colligere poſſumus, ſphæram eſſe æqualem cono, cujus altitudo ſit integra ſphæræ diameter, baſis vero dimidia ſphæræ circumferentia; id autem conſequitur ex propoſitionibus IX, & XV. Præclariſſima cir-

circa sphæram theoremata, non minus quam circa conum, & cylindrum, proponit, & demonstrat Archimedes, atque illud imprimis, superficiem sphæræ æqualem esse quatuor maximis ejusdem sphæræ circulis. Ex quo theoremate (per 1.) *facile inveniri potest circulus toti sphæræ superficiei æqualis, nimirum is, cujus diameter sit dupla diametri sphæræ.*

Hujus propositionis usus maximus est in physica, & præsertim in astronomia; siquidem cognita ratione, quæ inter corporum cælestium diametros intercedit, invenietur facile ratio, quæ intercedit inter eorum soliditatem. Hinc si diameter terræ sit ad solis diametrum, ut 1 *ad* 100, *soliditas terræ erit solis ad soliditatem, ut* 1 *ad* 1000, 000.

FINIS.

INDEX.

A

B

C

D

E

Fi-

F

G

H

I

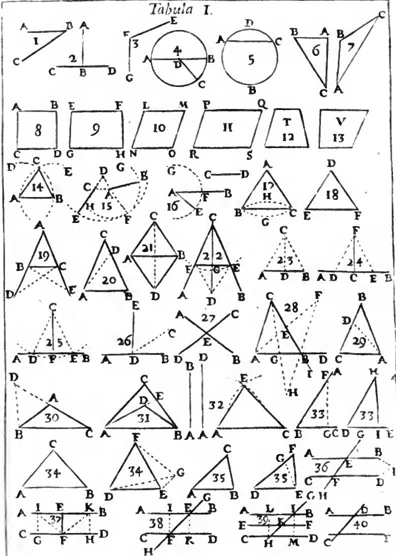
L

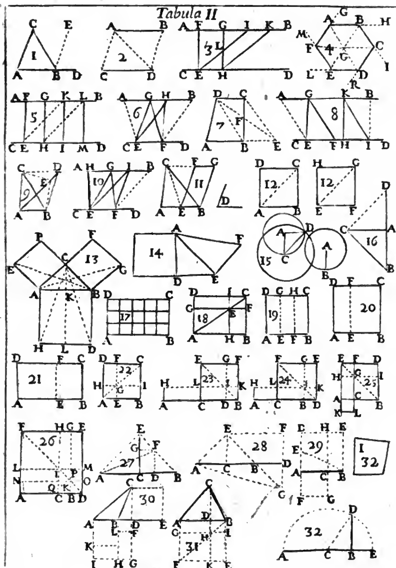
Pa-

S

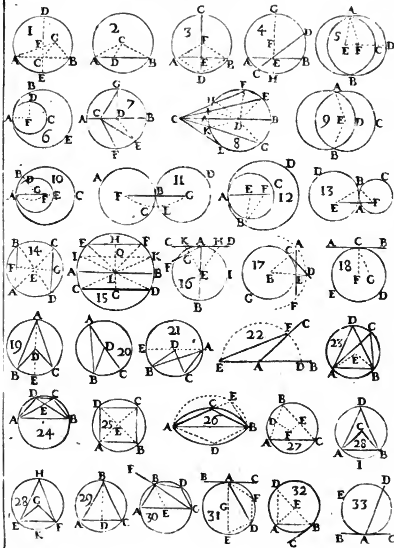
FINIS.

MENDA.	CORRECTIONES.
Prior numerus indicat pagellam, alter vero lineas.	
16. 8. *Amblizonium*	*Amblygonium*
16. 11. *Oxigonium*	*Oxygonium*
20. 21. habuerit	habuerint
41. 11. quod	qui
12. 2. a uno	ab uno
22. 3. atus	latus
23. 9. PREPARATIO	PRÆPARATIO
24. 18. PREPARATIO	PRÆPARATIO
128. 1. QARTUS	QUARTUS
170. 20. *idem esse + ac*	*idem esse, ac*
193. 8. *termino minori* d	*termino minori* b
38 9. quarum vna	quarum quælibet

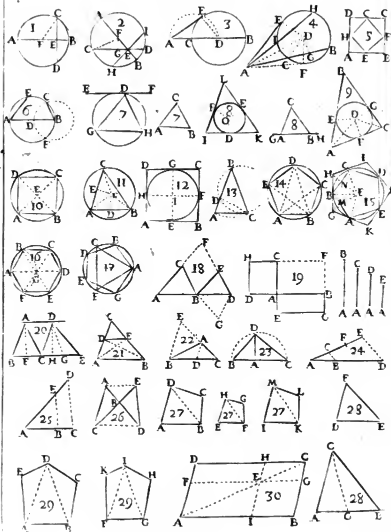

Tabula I.

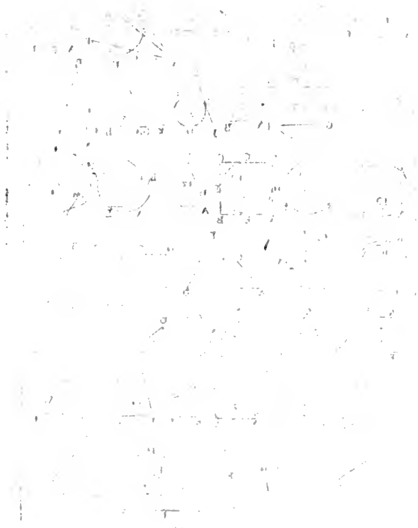

Tabula II

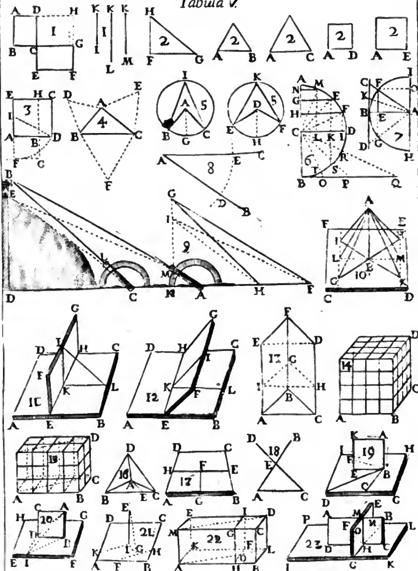


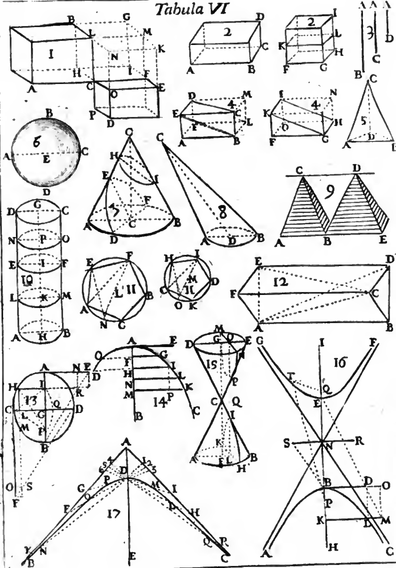

Tabula III

Tabula IV






Tabula V.


Tabula VI





